

**UN PONTE TRA TEORIA E PRATICA:
QUALE MATEMATICA OGGI IN CLASSE?**

Primo corso di formazione
dell'Associazione Rally Matematico Transalpino Siena
Siena, 22-24 novembre 2019

LABORATORIO ALGEBRA

**GARA DI PESCA - 27°RMT II PROVA
ANALISI A POSTERIORI**

Andriani M. Felicia (*Coordinatrice Internazionale ARMT*)

Doretti Lucia (*ARMT Siena*)

Salomone Lucia (*ARMT Siena*)

mlicia.andriani@gmail.com

lucia.doretti1954@gmail.com

luciasalomone8@gmail.com

Aldo, Carlo e Biagio partecipano ad una gara di pesca. Al termine della gara scoprono che:

- Biagio ha pescato 7 trote in più di Aldo;
- Carlo ha pescato il doppio delle trote pescate da Biagio che è anche il triplo di quelle pescate da Aldo.

Quante trote ha pescato ciascuno dei tre amici?

Spiegate il vostro ragionamento.

GARA DI PESCA (Cat. 5, 6, 7, 8)

A partire dalla metà degli anni Ottanta si è sviluppato a livello internazionale un filone di ricerca (*Early Algebra*) secondo il quale si possono prevenire gli ostacoli che gli studenti incontrano nello studio dell'Algebra promuovendo, sin dalla scuola primaria, forme di pensiero algebrico.

Si tratta di guardare all'aritmetica con prospettiva algebrica:

- guidando i bambini ad individuare relazioni, analogie e proprietà
- conducendoli gradualmente verso le prime forme di generalizzazione
- insistendo sugli aspetti strutturali dell'aritmetica (operazioni e loro proprietà)
- curando una corretta appropriazione del significato dell' « = »

Non si tratta di anticipare l'introduzione del linguaggio algebrico, tipico della scuola secondaria!

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare tre numeri naturali sapendo che il secondo numero supera di 7 unità il primo e che il terzo è sia il doppio del secondo che il triplo del primo.

Analisi del compito

- Comprendere che Aldo ha pescato meno trote di Biagio e Carlo, avendone Biagio pescate 7 in più di Aldo e Carlo il triplo di quelle di Aldo.
- Capire, aiutandosi eventualmente con una rappresentazione grafica, che il numero di trote pescate da Carlo, essendo “il doppio del numero di trote pescate da Biagio” è anche esprimibile come “il doppio del numero di trote pescate da Aldo più 14”.
- Ricordare che il numero di trote pescate da Carlo è anche il triplo del numero di trote pescate da Aldo.
- Confrontare le due ultime espressioni relative alle trote pescate da Carlo: $3A = 2A + 14$, e dedurre che il numero di trote pescate da Aldo è 14, poiché Biagio ne ha pescate $14+7=21$ e Carlo $3 \times 14=42$.

Oppure, dopo aver capito le relazioni tra i numeri di trote pescate, procedere per tentativi sistematici, eventualmente con l'aiuto di una tabella.

Oppure, considerare i multipli di 3, quelli di 2 e cercare quelli che differiscono di 14.

Oppure, indicare con x il numero di trote pescate da Aldo e impostare e risolvere l'equazione: $2(x + 7) = 3x$.

- Trovare, in ogni caso, che Aldo ha pescato 14 trote, Biagio ne ha pescate 21 e Carlo 42.

RISULTATI DELLA GARA

Punteggi attribuiti su **3.602** classi di **20** sezioni:

Categoria	0	1	2	3	4	Nb. classes	Moyenne
Cat 5	238 (31%)	69 (9%)	142 (18%)	157 (20%)	165 (21%)	771	1.92
Cat 6	411 (35%)	59 (5%)	298 (26%)	183 (16%)	213 (18%)	1164	1.77
Cat 7	198 (21%)	53 (6%)	286 (30%)	202 (21%)	202 (21%)	941	2.17
Cat 8	94 (13%)	28 (4%)	148 (20%)	142 (20%)	314 (43%)	726	2.76
Total	941 (26%)	209 (6%)	874 (24%)	684 (19%)	894 (25%)	3602	2.11

Si ricorda che il problema è stato affrontato nelle condizioni particolari del RMT: intera classe, allievi in completa autonomia, da 5 a 7 problemi da risolvere, un solo foglio risposta per problema.

Secondo i criteri dell'analisi a priori:

- **4 punti:** Riposta corretta (Aldo 14, Biagio 21, Carlo 42) con spiegazione chiara e completa della procedura seguita (dettaglio delle relazioni trovate, dei calcoli o dei tentativi eventuali, risoluzione con un grafico)
- **3 punti:** Riposta corretta con spiegazione parziale o poco chiara
- **2 punti:** Risposta corretta senza spiegazione
- **1 punto:** Inizio corretto di ricerca per esempio la sola rappresentazione grafica corretta o indicata esattamente con le lettere qualche relazione
- **0 punto:** Incomprensione del problema

COME HANNO LAVORATO GLI ALLIEVI?

Le osservazioni che seguono sono state fatte sulla base dell'analisi degli elaborati della **sezione di Siena**:

- 103 in cat. 5
- 226 in cat.6
- 192 in cat.7
- 138 in cat.8

In totale **659 elaborati**

STRATEGIA PER TENTATIVI

*E' la strategia più frequentemente
utilizzata in tutte le categorie*

Cat.6

COLONNA 1	COLONNA 2	COLONNA 3
$1 \times 3 = 3$	$1 + 7 = 8$	$8 \times 2 = 16$
$2 \times 3 = 6$	$2 + 7 = 9$	$9 \times 2 = 18$
$3 \times 3 = 9$	$3 + 7 = 10$	$10 \times 2 = 20$
$4 \times 3 = 12$	$4 + 7 = 11$	$11 \times 2 = 22$
$5 \times 3 = 15$	$5 + 7 = 12$	$12 \times 2 = 24$
$6 \times 3 = 18$	$6 + 7 = 13$	$13 \times 2 = 26$
$7 \times 3 = 21$	$7 + 7 = 14$	$14 \times 2 = 28$
$8 \times 3 = 24$	$8 + 7 = 15$	$15 \times 2 = 30$
$9 \times 3 = 27$	$9 + 7 = 16$	$16 \times 2 = 32$
$10 \times 3 = 30$	$10 + 7 = 17$	$17 \times 2 = 34$
$11 \times 3 = 33$	$11 + 7 = 18$	$18 \times 2 = 36$
$12 \times 3 = 36$	$12 + 7 = 19$	$19 \times 2 = 38$
$13 \times 3 = 39$	$13 + 7 = 20$	$20 \times 2 = 40$
$14 \times 3 = 42$	$14 + 7 = 21$	$21 \times 2 = 42$
$15 \times 3 = 45$	$15 + 7 = 22$	$22 \times 2 = 44$

L'ho risolto grazie a questa tabella: quando vedevo il risultato di un numero della colonna 1, che "cominciavo con uno della colonna 3, ed era il triplo di esso ho escluduto
no RISULTATI:

ALDO: 14 / BIAGIO 21 / CARLO 42

In questo caso l'ho capito grazie al 40, se il 14

Sono indicate tutte le operazioni ma non è esplicitato in una colonna a parte il valore iniziale (numero delle trote di Aldo)

Cat. 7

Hp:

$$\text{Biagio} = \frac{1}{2} \text{troute} + \text{Aldo}$$

$$\text{Carlo} = \text{Biagio} \cdot 2 = \text{Aldo} \cdot 3$$

Ts:

? = troute pescate da ciascuno.

ALDO	BIAGIO	CARLO
1	8	3 - 16
2	9	6 - 18
3	10	9 - 20
4	11	12 - 22
5	12	15 - 24
6	13	18 - 26
7	14	21 - 28
8	15	24 - 30
9	16	27 - 32
10	17	30 - 34
11	18	33 - 36
12	19	36 - 38
13	20	39 - 40
14	21	42

Per risolvere questo problema abbiamo utilizzato una tabella a tentativi. Siamo partiti da Aldo il quale è l'uomo che ha pescato meno troute. Per Aldo abbiamo quindi utilizzato una numerazione naturale da 1 in poi. Per Biagio abbiamo sempre aggiunto $\frac{1}{2}$ troute da quelle di Aldo. Per Carlo, invece, bisogna trovare un numero di troute che fosse il doppio di quella di Biagio e il triplo di quella di Aldo.

Dovevamo, quindi, trovare un numero che equivalesse al doppio delle troute di Biagio e il triplo di quella di Aldo. Così facendo siamo giunti al seguente risultato:

$$\text{ALDO} = 14 \text{ troute}$$

$$\text{BIAGIO} = 21 \text{ troute}$$

$$\text{CARLO} = 42 \text{ troute}$$

7076

I tentativi si fermano a 14 che soddisfa tutte le condizioni. In generale in una procedura per tentativi occorre continuare per accertarsi che non ci siano altre soluzioni

ALDO

~~14~~

14

BIAGIO

~~14~~

14 + 9

$$\begin{array}{r} 21 + \\ 21 = \\ \hline 42 \end{array}$$

CARLO

14 x 3 = 42

SOLUZIONE

Abbiamo trovata la soluzione andando per tentativi.

Il meccanismo che abbiamo capito è stato trovare un numero e aggiungendo 7 dava un numero che moltiplicato per due aveva lo stesso risultato del numero iniziale per tre.

Si sono *appropriati* perfettamente del compito matematico e l'hanno chiaramente descritto

La **procedura per tentativi**, in particolare se organizzati, può essere l'occasione per avvicinare gli allievi:

- *all'uso delle lettere per esprimere in forma generale quantità e relazioni tra di esse*
- *all'idea di funzione*
- *al concetto di equazione*

Per esempio, riprendendo i due elaborati precedenti:

Hp:

$$\text{Biagio} = \# \text{troute} + \text{Aldo}$$

$$\text{Carlo} = \text{Biagio} \cdot 2 = \text{Aldo} \cdot 3$$

Ts:

? = troute pescate da ciascuno.

ALDO	BIAGIO	CARLO
1	8	3-16
2	9	6-18
3	10	9-20
4	11	12-22
5	12	15-24
6	13	18-26
7	14	21-28
8	15	24-30
9	16	27-32
10	17	30-34
11	18	33-36
12	19	36-38
13	20	39-40
14	21	42 ←

Cat.7

Abbiamo trovato la soluzione andando per tentativi.
Il meccanismo che abbiamo capito è stato trovare un numero e aggiungendo 7 dava un numero che moltiplicato per due aveva lo stesso risultato del numero iniziale per tre.

Cat. 6

n

n+7

$$3 \times n = 2 \times (n+7)$$



l'equazione in quanto scrittura ha "senso" per gli allievi: $3n = 2(n+7)$

Situazioni di questo tipo possono portare ad *ulteriori sviluppi anche sul piano del calcolo letterale*:

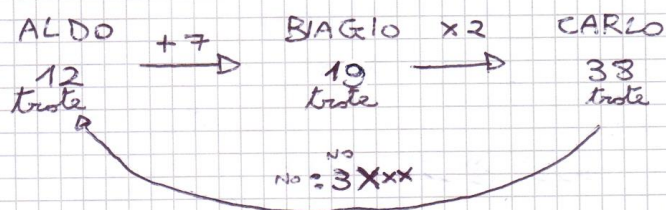
- uso delle parentesi,
- soppressione del segno di moltiplicazione,
- pluralità di scritture di una stessa espressione algebrica (per es. $2(x+7)$, $2x+14$, $x+x+14$, ...)

Per risolvere questo problema siamo andati a tentativi. Inizialmente abbiamo provato con numeri minori partendo da Aldo che era quello che aveva pescato il minor numero di trote.

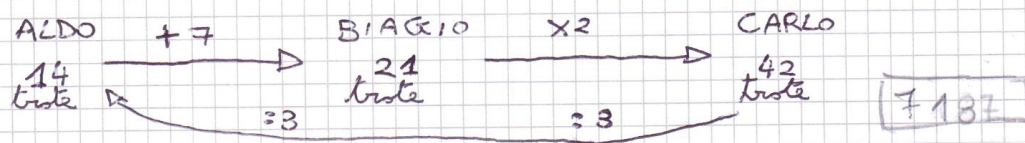
Abbiamo iniziato con il numero 6, che era il primo abbastanza probabile, fortunatamente ci siamo accorti che non era il numero giusto, così abbiamo continuato con il 7, l'8 ed il 9, ma neanche questi numeri andavano bene.

Così siamo passati ai numeri a 2 cifre, abbiamo iniziato dal numero 12, che speravamo ci portasse fortuna, visto che per i Babilonesi era magico.

Con il numero 12 ci siamo andati molto vicini:



A questo punto sicuri di essere vicini alla soluzione abbiamo provato con il 13, ma non andava bene, così alla fine siamo arrivati al numero 14 e ci siamo accorti che era quello giusto:



Procedono per tentativi utilizzando un diagramma sagittale che, per ogni numero ipotizzato per Aldo, permette di stabilire se è quello corretto o no

Cat. 7

ALDO HA PESCATO 14 TROTE, BIAGIO INVECE NE HA PESCATE 21 E CARLO 42. ABBIAMO FATTO A TENTATIVI FACENDO SÌ CHE IL PRIMO NUMERO ABBA SETTE NUMERI DI DIFFERENZA DAL SECONDO E AGGIUGENDO SEMPRE UN NUMERO A TUTTI E DUE, MOLTIPLICANDO POI IL PRIMO PER DUE E IL SECONDO PER 3, SIAMO PARTITI DA 9 E 2 FINO A 21 E 14.

$$\begin{array}{l}
 2x \quad \frac{9}{2} \\
 \hline
 18/6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x_3 \quad \frac{10}{3} \\
 \hline
 20/9
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x_2 \quad \frac{11}{4} \\
 \hline
 22/12
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x_3 \quad \frac{12}{5} \\
 \hline
 24/15
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x_2 \quad \frac{13}{6} \\
 \hline
 26/18
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x_2 \quad \frac{14}{7} \\
 \hline
 28/24
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x_3 \quad \frac{15}{8} \\
 \hline
 30/24
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x_2 \quad \frac{16}{9} \\
 \hline
 32/27
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x_3 \quad \frac{17}{10} \\
 \hline
 34/30
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x_2 \quad \frac{18}{11} \\
 \hline
 36/33
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x_2 \quad \frac{19}{12} \\
 \hline
 38/36
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x_3 \quad \frac{20}{13} \\
 \hline
 40/39
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 x_2 \quad \frac{21}{14} \\
 \hline
 42/42
 \end{array}$$

7123

Da notare:

- Scelta inusuale dell'incognita (numero di trote di Biagio anziché di Aldo)
- L'utilizzo di un diagramma «a croce»

INDIVIDUAZIONE DI REGOLARITÀ PER RIDURRE IL NUMERO DI TENTATIVI

Per trovare la soluzione, abbiamo utilizzato un metodo a tentativi, seguendo questo schema

ALDO	Biagio	CARLO		
1	8	$1 \cdot 3 = 3$, $8 \cdot 2 = 16$	(No)	13 differenza
2	9	$2 \cdot 3 = 6$, $9 \cdot 2 = 18$	(No)	12 " "
3	10	$3 \cdot 3 = 9$, $10 \cdot 2 = 20$	(No)	11 " "
4	11	$4 \cdot 3 = 12$, $11 \cdot 2 = 22$	(No)	10 " "
5	12	$5 \cdot 3 = 15$, $12 \cdot 2 = 24$	(No)	9 " "

Proseguendo così, abbiamo trovato...

14	21	42	(Sì)	0 " "
----	----	----	------	-------

Abbiamo trovato che la differenza tra il triplo delle trote di Aldo e quelle del ^{doppio delle} trote di Biagio ~~si~~ diminuisce sempre di 1. La differenza nel primo tentativo era 13, la soluzione del primo tentativo era 8 trote a Biagio. Abbiamo fatto $8 + 13 = 21$. 21 era il numero delle trote di Biagio, abbiamo fatto allora $21 - 7 = 14$ e $14 \cdot 3 = 42$.

Risposta

Aldo ha pescato 14 trote, Biagio 21 e Carlo 42.

7080

SI LIMITA LA RICERCA (PER CARLO) AI MULTIPLI DI 2 E DI 3

Aldo = ?

Carlo = 2 · Biagio A · 3

Biagio = 7 + Aldo

Per trovare Carlo abbiamo cercato un numero divisibile sia per 2 che per 3 perché le trote di Biagio sono la metà di Carlo e Aldo è la sua terza parte.

PROCEDENDO A TENTATIVI ABBIAMO TROVATO DIVERSI RISULTATI e l'ultimo è quello giusto.

C 12	B 6	A 4	(No perché $A + B \neq C$)
C 24	B 12	A 8	(No perché $A + B \neq C$)
C 30	B 15	A 10	(No perché $A + B \neq C$)
C 36	B 18	A 12	(No perché $A + B \neq C$)
C 42	B 21	A 14	(Sì perché $A + B = C$)

8103

Cat. 8 Il numero di trote di Carlo è scelto come incognita

Cat. 7 Confronto tra valori Biagio e valori «differenza»

UTILIZZO DI UNA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA CON SEGMENTI

E' un tipo di rappresentazione che compare negli elaborati di tutte le categorie:

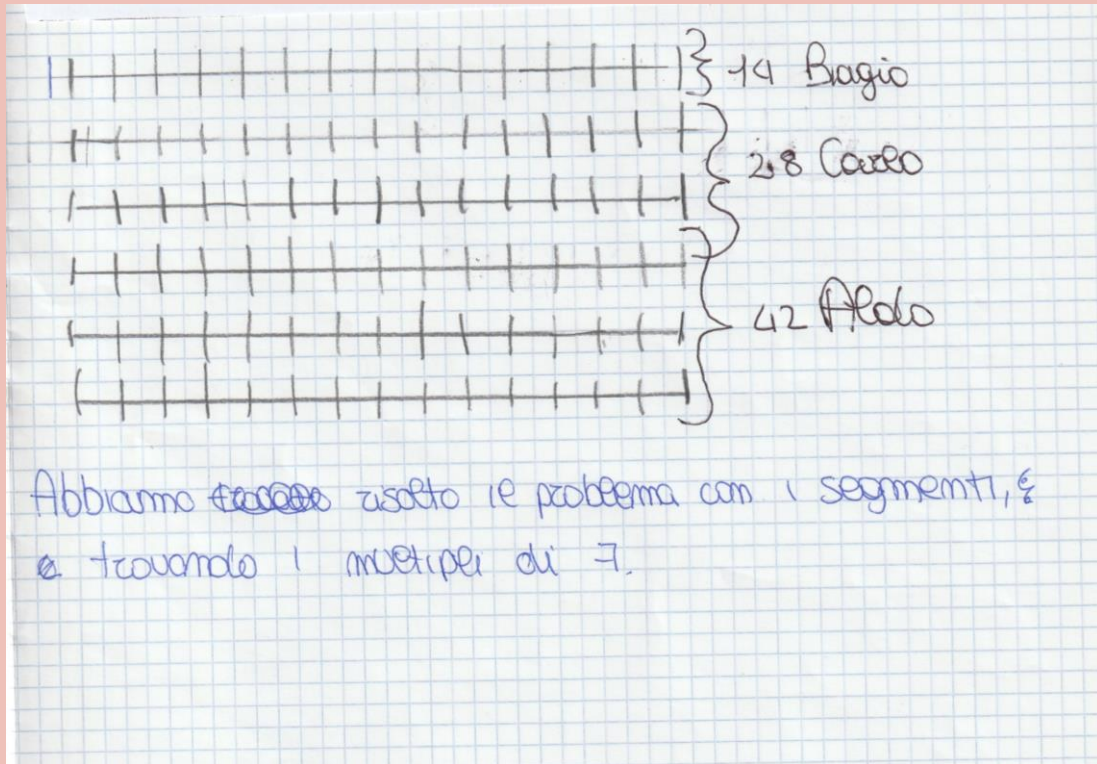
In cat. 5 se ne trovano 6 su 103 elaborati 5,8%

In cat. 6 se ne trovano 27 su 226 elaborati 11,9%

In cat. 7 se ne trovano 15 su 192 elaborati 7,8%

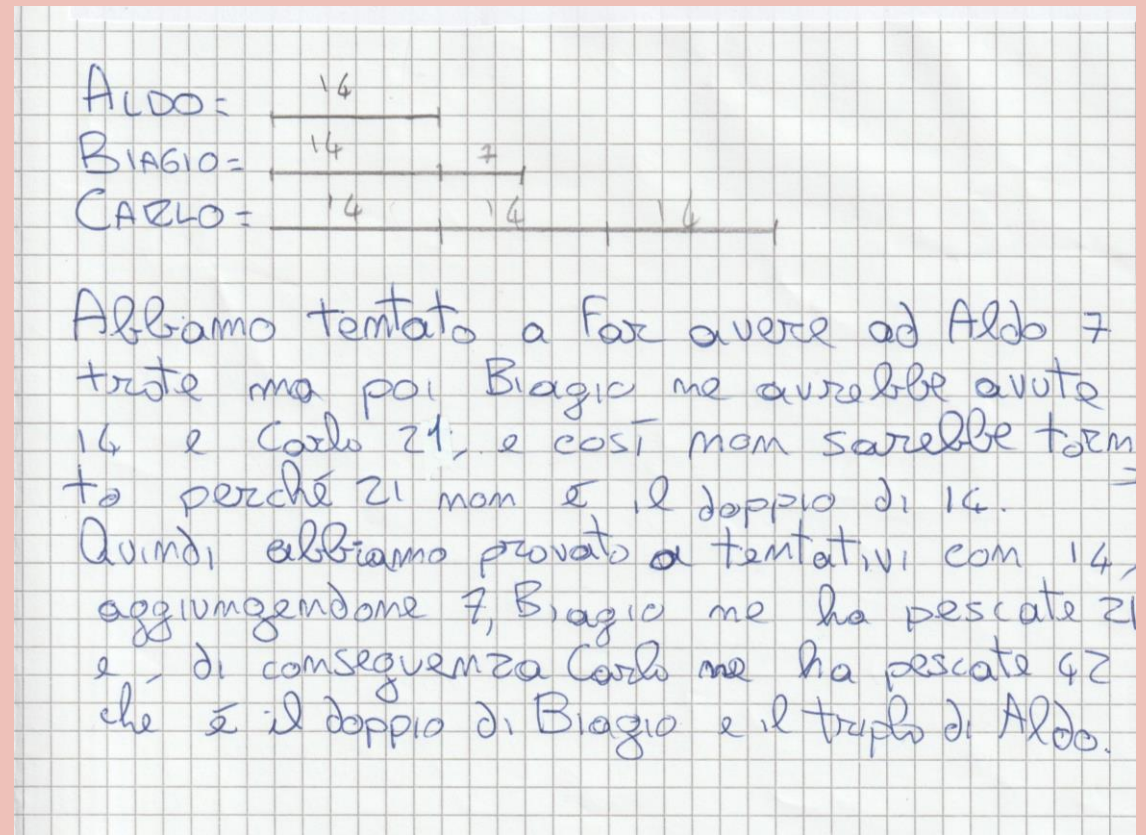
In cat. 8 se ne trovano 14 su 138 elaborati 10%

- Si osserva la percentuale più alta in cat. 6
- Spesso sembra che il ricorso a questo strumento non sia spontaneo ma dovuto alla *necessità di rispondere al «contratto didattico»*
- Ne consegue una *rappresentazione spesso errata o incompleta e alcune volte inutilizzata per la risoluzione del problema*



Cat. 6

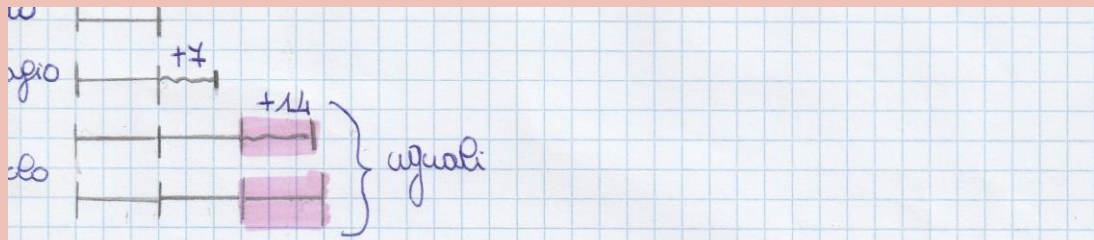
Disegnano i segmenti in modo errato e inutile ma dicono di aver risolto il problema con i segmenti



Cat. 6

Rappresentazione grafica corretta in cui non è esplicitata la rappresentazione di « $C=2B$ ». Sembrerebbe però fatta a posteriori perché la soluzione è trovata per tentativi...

Rappresentazione grafica correttamente utilizzata



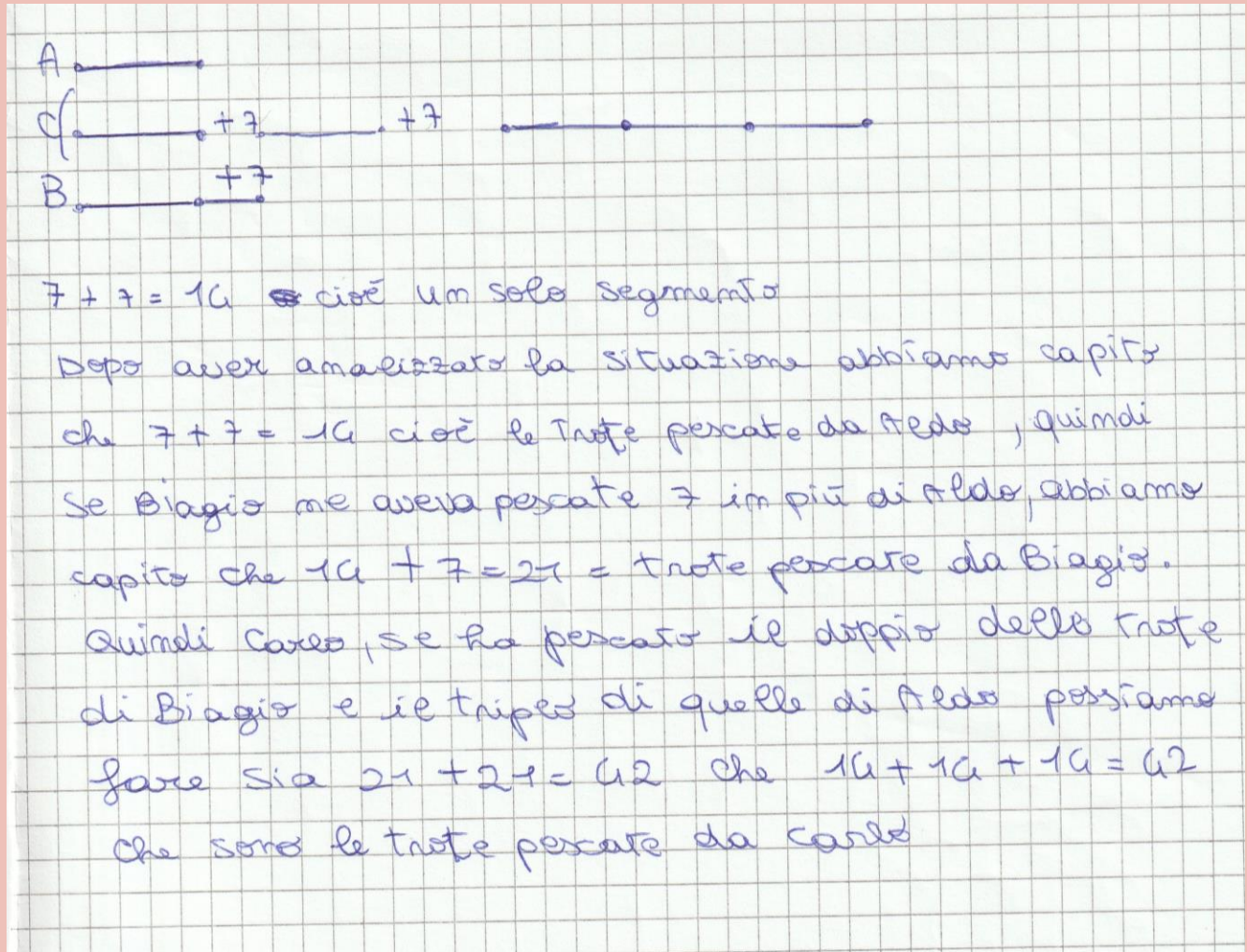
Spiegazione

Siamo arrivati alla conclusione che Aldo ha preso 14 trote; Biagio invece ne ha prese 21 e Carlo 35.

Per scoprire le trote di Aldo abbiamo prima scoperto che:

Le trote di Carlo erano il doppio di Biagio e uguale al triplo di Aldo, così abbiamo fatto un disegno e abbiamo visto, ~~facendoci partire dallo stesso punto, che~~ l'ultimo pezzo era uguale a quelli normali, e ~~valore~~ vale 14. Poi per scoprire le trote di Biagio abbiamo aggiunto a ~~14~~ 14 7, perché nel testo c'era scritto che Biagio ne aveva prese ~~7~~ 7 in più. Invece per Carlo abbiamo moltiplicato 14 per 3, perché erano ~~uguale~~ ~~il~~ il triplo delle trote di Aldo.

Cat. 5



Cat. 6

SI TROVANO ANCHE ALTRI TIPI DI RAPPRESENTAZIONE

Per trovare le trote pescate da ciascuno dei tre amici abbiamo seguito lo schema sotto=stante:

LEGENDA
ALDO = A
BIAGIO = B
CARLO = C

$$\left. \begin{array}{l} B = A + 7 \\ C = 2B \\ C = 3A \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} A = \bullet \\ B = \bullet + 7 \\ C = \bullet\bullet + 14 \\ C = \bullet\bullet\bullet \end{array} \right\}$$

Dallo schema abbiamo capito che un pallino equivale a 14 trote. Poi abbiamo trovato le trote pescate da Carlo che sono 42 ($14 \cdot 3 = 42$). Dopo abbiamo trovato le trote pescate da Aldo che sono 14 ($42 : 3 = 14$). Infine abbiamo trovato le trote pescate da Biagio che sono 21 ($14 + 7 = 21$).

Cat. 5

$$B = A + 7 \\ C = 2B = 3A$$

$$B = \bullet + 7 \\ A = \bullet \\ C = \bullet\bullet + 14 = \bullet\bullet\bullet$$

$$14 + 7 = 21 B \\ 21 \times 2 = 42 C \\ 14 = A$$

$$\bullet = 14$$

Per trovare il risultato abbiamo schematizzato graficamente in pallini; in questo modo ci siamo accorti che le trote pescate da Aldo sono 14, quelle di Biagio sono 21 e quelle di Carlo sono 42.

7044

Cat. 7

Da notare la presenza di una *scrittura simbolica* che traduce le relazioni tra i dati e che affianca la *rappresentazione grafica*

PROCEDURE DI TIPO ALGEBRICO

In tutte le categorie si trovano elaborati (uno anche in cat.5!) dove i dati e le relazioni tra essi sono espresse con *scritture di tipo pre-algebrico o algebrico* nelle quali si possono riconoscere equazioni

$$\begin{array}{l}
 \text{Biagio} = 7 \text{ trote} + \text{Aldo} \quad \text{Aldo} = 7 \\
 \text{Carlo} = \text{Biagio} \cdot 2 \quad 2 \cdot (\text{Aldo} + 7) = 3 \text{ Aldo} \\
 \text{Aldo} = ? \quad 2 \text{ Aldo} + 14 = 3 \text{ Aldo} - 2 \text{ Aldo} \\
 \\
 \text{Biagio} = 14 + 7 = 21 \text{ trote} \quad 14 = \text{Aldo} \\
 \text{Carlo} = 42 \text{ trote} \\
 \text{Aldo} = 42 : 3 = 14 \text{ trote} \quad \boxed{7105}
 \end{array}$$

Cat. 7 *Si comincia a sperimentare l'uso di un nuovo linguaggio...*

RISPOSTA

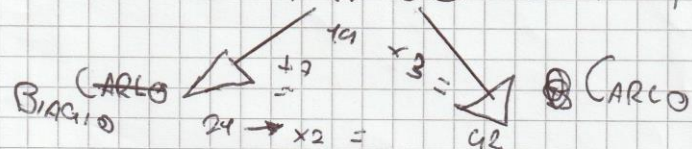
Albo ha pescato 14 brote, Biagio 21 e Carlo 42

SPIEGAZIONE

Siamo partiti ~~puntando~~ ~~si~~ ~~numeri~~ dal fatto che Biagio ~~aveva~~ aveva 7 brote in più di Albo, e che Carlo aveva pescato il triplo delle brote di Albo e il doppio ~~di quelle~~ di Biagio. Siamo andati a tentativi facendo queste operazioni:

~~$14 + 7 = 21$ cioè 7 in più~~
 $B = A + 7 \quad A = ?$

ALDO $C = A + A + A = A + 7 + A + 7$



e così abbiamo capito il risultato:

- Albo 14 brote
- Biagio 21 brote
- Carlo 42 brote

Cat. 5

Gli allievi scrivono l'equazione dimostrando una buona padronanza del concetto di doppio e triplo e poi procedono per tentativi e realizzano uno schema ben organizzato per il controllo

ABBIAMO ~~PROVATO~~ ABBREVIATO ALDO CON A BIAGIO CON B E CARLO
CON C, ABBIAMO TRADOTTO IN LINGUAGGIO MATEMATICO E SIAMO RIUSCITI
A CAPIRE ~~COI~~ CHE FACENDO:

$$B = 7 + A$$

$$C = B \times 2$$

$$C = A \times 3$$

$$B \times 2 = A \times 3$$

$$(7 + A) \times 2 = A \times 3$$

$$14 + A \times 2 = A \times 3$$

DOPO VARI TENTATIVI ABBIAMO TROVATO CHE L'UNICO NUMERO CHE CORRISPONDE
AD A È 14.

$$A = 14$$

$$B = 7 + 14 = 21$$

$$C = 14 \times 3 = 42$$

Gli allievi impostano
l'equazione, applicano la
proprietà distributiva e poi
procedono per tentativi

Cat. 6

Buona gestione del calcolo algebrico

Cat.6

$$\begin{aligned}x + 7 + x + 7 &= x + x + x \\x + x + 14 - 2x &= x + x + x - 2x \\14 &= x\end{aligned}$$

$14 =$ trote CARLO

~~14 + 7 = 21~~

$14 + 7 = 21$ trote BIAGIO
 $21 \cdot 2 = 42$ trote CARLO

RIPROVA
 $42 : 3 = 14$

7 10 2

Cat.7

$$\begin{aligned}b &= a + 7 \quad || \cdot 2 \quad 2b = 2a + 14 \quad 14 + 7 = 21 \quad b = 21 \\c &= 2b \text{ o } 3a \quad c = 2a + 14 \quad 3a = 2a + 14 \quad || -2a \quad a = 14 \\a &= c : 3 \text{ o } 14 \quad 3 \cdot 14 = 42 \quad c = 42\end{aligned}$$

Aldo = 14 trote
Carlo = 42 trote
Biagio = 21 trote

7 17 9

Cat.7

OPERAZIONE

$$\text{ALDO} = x$$

$$\text{BIAGIO} = x + 7$$

$$\text{CARLO} = (x + 7) \cdot 2 = 2x + 14$$

$$3x = 2x + 14$$

$$x = 14$$

$$\text{ALDO} = 14$$

$$\text{BIAGIO} = 14 + 7 = 21$$

$$\text{CARLO} = 21 \cdot 2 = 42 + 14 \cdot 3 = 42$$

$$42 + 42 = 84$$

Qui risolvono l'equazione per confronto, ma alla fine si perdono e interpretano la frase «che è anche» come se fosse «e anche», quindi fanno la somma per il numero di trote di Carlo

DATI

3 AMICI (BIAGIO, CARLO, ALDO)

BIAGIO = PESCI DI ALDO + 7

CARLO = PESCI DI BIAGIO \times 2 = PESCI PESCATI DA ALDO \times 3

SOLGIMENTO



METODO 1,

$$3x = 2(x + 7)$$

$$3x = 2 + 14$$

$$3x - 2x = 14$$

$$x = 14 \quad \text{ALDO}$$

$$\text{BIAGIO} = 14 + 7 = 21$$

$$\text{CARLO} = 21 \cdot 2 = 42$$

METODO 2,

$$5x + 7 = 4x + 3 \cdot 7$$

$$5x - 4x = -7 + 21$$

$$x = 14 \quad \text{ALDO}$$

$$\text{BIAGIO} = 14 + 7 = 21$$

$$\text{CARLO} = 21 \cdot 2 = 42$$

Cat. 8 Si privilegia l'uso del *metodo algebrico* per la risoluzione, mentre il *metodo grafico* è utilizzato per visualizzare i «dati» del testo

E ANCORA.....

Usano le proporzioni

Abbiamo constatato che Carlo ha più trote.

Il numero di trote di Carlo deve essere divisibile sia per 2 che per 3 quindi dobbiamo trovare quante trote ha Carlo.

Abbiamo pensato di trovare un numero che a cui se sommiamo 7 e poi lo moltiplichiamo per 2 da un numero divisibile $x \cdot 2$ e $x \cdot 3$ e se diviso per 3 deve dare il numero che abbiamo aggiunto a 7. Primo tentativo = $2 + 7 = 9$ $9 \cdot 2 = 18$

$18 : 3 = 6$. Abbiamo fatto lo stesso calcolo con i numeri 5, 6,

7, 8, 9, tanti altri numeri. Abbiamo fatto una proporzione e abbiamo applicato la proprietà dello scomporre in questo modo:

$$(x-y) : x = (3-2) : 3$$

$$7 : x = 1 : 3 \quad 7 \cdot 3 = 21 \quad x/x \quad x = 21 \quad 21 \cdot 1 = 21$$

$$(x-y) : y = (3-2) : 2$$

$$7 : y = 1 : 2 \quad 7 \cdot 2 = 14 \quad y = 14 \quad 14 \cdot 1 = 14$$

$$7 + y = x \cdot 2 = 7 : 3 = y$$

$$7 + 14 = 21 \cdot 2 = 42 : 3 = 14$$

$$\text{Aldo} = 14$$

$$\text{Biagio} = 21$$

$$\text{Carlo} = 42$$

$$\text{Carlo} = 2 \cdot \text{Biagio} = 2 \cdot 21 = 42$$

$$\text{Carlo} = 3 \cdot \text{Aldo} = 3 \cdot 14 = 42$$

$$\text{Biagio} = \text{Aldo} + 7 = 14 + 7 = 21$$

7057

Ciò che gli allievi affermano è tutto vero, ma va spiegato meglio!

All'inizio procedono per tentativi, senza formalizzare, ma si fermano prima di trovare il valore corretto.

Cambiano strategia ed usano una proporzione.
Perché?

Se $y = n^\circ$ trote di Aldo, $x = n^\circ$ trote di Biagio, ciò che fanno è quello di scrivere la relazione

$3y = 2x$ mediante la proporzione $x : y = 3 : 2$

(le stanno utilizzando in classe?) poi applicano la proprietà dello scomporre ed arrivano alla soluzione!

Usano l'«unità frazionaria»

Dobbiamo capire quante brotte ha pescato Aldo, quindi Aldo è l'unità frazionaria. Se Aldo è uno allora Carlo è tre e Biagio è 1,5. Quindi lo 0,5 equivale alle 7 brotte che Biagio ha preso in più di Aldo. Sapendo questo si può moltiplicare 7 per 2 e troviamo 14 che equivale ad un intero. Quindi 14 sono le brotte che ha preso Aldo. Aggiungendo 7 a 14 si trova quello che ha pescato Biagio quindi 21. Moltiplicando 14 per 3 si trova quello che ha pescato Carlo ovvero 42.

8035

Cat. 8

DIFFICOLTÀ ED ERRORI

Ragionamento:

Li siamo basati sul numero 7. Visto che Carlo aveva il doppio delle trote di Biagio e il triplo di quelle di Aldo abbiamo moltiplicato 7×2 e $\times 3$ arrivando al numero 42. Poi abbiamo fatto $42 : 2 = 21$ trovando le trote di Biagio perché erano la metà di quelle di Carlo. Poi abbiamo fatto $21 - 7 = 14$, trovando le trote di Aldo perché erano 7 in meno di quelle di Biagio.

In molti elaborati di tutte le categorie si trova questa procedura: si moltiplica 7 per 2 o/e per 3 e a partire da 14, 21 o 42, si attribuiscono valori al numero di trote di ciascuno dei tre amici. Talvolta si arriva anche a trovare la soluzione corretta.

L'impressione (sostenuta anche da alcune affermazioni presenti negli elaborati) è che, essendo 7 l'unico numero a disposizione insieme a «doppio» e «triplo» ci si aggrappi a questi «dati» per fare in qualche modo dei conti

A volte si dice che i **tre numeri da determinare devono essere multipli di 7**

$$B - A = 7 \text{ trote}$$

$$C = B \times 2$$

$$C = A \times 3$$

Visto che la differenza di Biagio e Aldo è 7 trote,
il numero delle trote pescate si trova nella tabella del 7.

tabella del 7

7	
14	Aldo
21	Biagio
28	
35	
42	Carlo
49	
56	
63	
70	

$$21 - 7 = 14 \text{ Aldo}$$
$$\textcircled{14} \cdot 3 = \textcircled{42} \text{ Carlo}$$
$$\text{Biagio} \rightarrow \textcircled{21} \cdot 2 = 42 \text{ Carlo}$$

Cat. 8

La soluzione è corretta perché questo fatto è vero!

Come lo si prova? E se si sostituisse il numero 7 con un altro numero, varrebbe ancora?

In generale, dalla condizione “*Carlo ha pescato il doppio delle trote pescate da Biagio che è anche il triplo di quelle pescate da Aldo*” si ricava che qualunque sia l'esubero n di trote di Biagio rispetto ad Aldo, il numero di trote di Aldo, di Biagio e di Carlo sono sempre rispettivamente il *doppio di n* , il *triplo di n* e il *sestuplo di n*

[se A , B , C indicano rispettivamente il numero di trote di Aldo, Biagio e Carlo, dalle relazioni $C=2B=3A$ e da $B=A+n$, si ha $2A+2n=3A$, da cui **$A = 2n$** (di conseguenza **$B=A+n=3n$** e **$C=3A=6n$**)]

PER GLI ALLIEVI PIÙ GRANDI....

Se, in generale, avessimo $B = A+n$ e $C = pB = qA$ con n, q e p numeri naturali, esiste sempre un numero naturale A per cui $p(A+n) = qA$?

Si ha

$C = p(A+n) = qA$ da cui $A = \frac{pn}{q-p}$ e quindi $q - p$ deve essere un divisore di pn

Si deve quindi avere: $q - p > 0$ (quindi $q > p$) e $q - p$ divisore di pn

In particolare:

se $q - p = 1$, cioè se q è il successivo di p , allora l'equazione $p(A+n) = qA$ ha sempre soluzione

42 trote pescate da Carlo - 21 trote pescate da Biagio - 14 trote pescate da Aldo

All'inizio abbiamo intuito che il numero delle trote ^{pescate} dei 3 amici, erano tutti divisi multipli di 7. Poi abbiamo trovato il minimo comune tra $7-3-2$: ci è tornato 42, che era il numero delle trote ~~pescate~~ pescate da Carlo. Poi abbiamo diviso il numero delle trote pescate da Carlo, ossia 42, per 2 (perché il numero delle trote pescate da Biagio erano la metà delle trote pescate da Carlo), e ci è tornato 21, che erano le trote pescate da Biagio. Per trovare le trote pescate da Aldo abbiamo sottratto a 21 (le trote pescate da ~~Aldo~~ Biagio) il numero 7 e ci è venuto 14. Per fare la riprova abbiamo controllato che le trote pescate da Carlo, ovvero 42, fossero il triplo di quelle di Aldo, ovvero 14, e visto che 42 è il triplo di 14, il problema ~~era~~ era, secondo noi, stato ~~con~~ risolto in modo corretto.

8013

Anche qui gli allievi partono dalla considerazione che il numero di trote pescate da ciascuno dei tre amici sia un multiplo di 7, poi **calcolano il m.c.m. $(7, 3, 2) = 42$ per ottenere il valore di C**

In questo caso funziona! Ma sarà vero in generale?

La risposta è NO!

Controesempio:

$$\text{Se } n=5 \quad p=4 \quad q=9 \quad \text{allora} \quad A = \frac{pn}{q-p} = \frac{20}{5} = 4 \quad B = A+n = 9$$

$$C = pB = qA = 36 \neq \text{m.c.m.}(5,4,9)$$

Abbiamo provato diverse volte con la seguente operazione:

$$a + 7 = b \cdot 2 = c : 3 = a$$

a = Trote di Aldo

b = Trote di Braggio

c = Trote di Carlo

Finché non abbiamo trovato il numero esatto: 14

Trote Aldo = 14

Trote Braggio = 21

Trote Carlo = 42

$$14 + 7 = 21 \cdot 2 = 42 : 3 = 14$$

La scrittura è ovviamente errata e mostra una *non comprensione della simmetria e transitività dell'uguale*.

Gli allievi, però, l'hanno saputa gestire interpretandola come una sequenza di operazioni al termine della quale si doveva ritrovare il numero di partenza

In alcuni casi, interferisce la non conoscenza che ancora permane del **ruolo dello 0**

Aldo ha pescato 0 trote, Biagio ne ha pescato 7 in più
perciò ha pescato 7 trote. Carlo ha pescato il doppio delle
trote pescate da Biagio perciò equivale a 14 trote. Ma è
anche il triplo di quelle di Aldo e se non ne ha pescato
nessuna non ha un triplo.

Aldo 0 trote
Biagio 7 trote
Carlo 14 trote

8105

Cat. 8

$$A = ?$$

$$B = 7 + A$$

$$C = (B \cdot 2) + (A \cdot 3)$$

$$(x \cdot 2) + (x \cdot 3)$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$A = 3$$

$$B = 7 + 3 = 10$$

$$C = (10 \cdot 2) + (3 \cdot 3)$$

$$20 + 9 = 29$$

RAGIONAMENTO:

Non sapevamo quanto fosse A quindi abbiamo fatto un'equazione per capire quanto fosse A e abbiamo dato ad Aldo il numero di X , facendo un'equazione abbiamo scoperto che A è 3 .

80,27

Cat. 8

E' significativo e deve far riflettere il fatto che situazioni di questo genere siano assenti nelle altre categorie!

Abbiamo risolto questo problema con le equazioni

$$2x + x + 3x + x = 7$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

LE TROTE DI ALDO SONO 1

BIAGIO A $7 + 1 = 8$ TROTE

CARLO INVECE A $3 + 16 = 19$ TROTE

80,96

Cat. 8

Gli allievi, probabilmente per contratto didattico, si sentono obbligati ad utilizzare lo strumento "equazioni", ma appare evidente che quello che **manca del tutto** è il "senso" di ciò che si fa!

ALLEGATO N. I

Scheda per analisi del testo del problema **GARA DI PESCA**

*(dall'attività svolta in classe dalla
Prof.ssa Andriani)*

Leggi attentamente il testo del problema e aiutami a completare la seguente tabella

Domanda	Risposta (Spiega il perché della tua risposta)
Leggendo il testo del problema conosciamo il numero delle trote pescate da Biagio?	
Leggendo il testo del problema conosciamo il numero delle trote pescate da Aldo?	
Leggendo il testo del problema conosciamo il numero delle trote pescate da Carlo?	
C'è qualcuno tra Aldo, Biagio e Carlo che può non aver pescato niente?	
E' corretto dire che Carlo ha pescato più trote di tutti e tre?	
E' corretto dire che Aldo ha pescato meno trote rispetto a Biagio e Carlo?	
E' corretto dire che Aldo ha pescato $\frac{1}{3}$ delle trote di Carlo?	
E' corretto dire che Aldo ha pescato $\frac{1}{3}$ delle trote di Biagio?	
E' corretto dire che Biagio ha pescato la metà delle trote di Carlo?	
E' possibile affermare che Biagio ha pescato esattamente 7 trote?	
Se conosci il numero esatto delle trote pescate da Aldo, puoi ricavare il numero delle trote pescate da Biagio? E quelle pescate da Carlo?	
Se conosci il numero esatto delle trote pescate da Carlo, puoi ricavare il numero delle trote pescate da Biagio? E quelle pescate da Aldo?	
Se conosci il numero esatto delle trote pescate da Biagio, puoi ricavare il numero delle trote pescate da Aldo? E quelle pescate da Carlo?	

Confronto e discussione

ALLEGATO N.2

**Attività per il completamento
delle ore di formazione**

SI RICHIEDE A CIASCUN DOCENTE DI:

- **proporre il problema «Gara di Pesca» in classe**, in modalità Rally (gli allievi lavorano in completa autonomia divisi in piccoli gruppi, discutono tra loro e ciascun gruppo risolve il problema e spiega il ragionamento fatto sul proprio «foglio risposta»)
- **organizzare un successivo confronto tra i gruppi di allievi** con messa in comune e discussione sull'attività svolta (difficoltà incontrate nel risolvere il problema, strategie utilizzate, errori commessi,...)
- **inviare per mail alle responsabili del Laboratorio Algebra** (mlicia.andriani@gmail.com, lucia.dorettil954@gmail.com, luciasalomone8@gmail.com) **una relazione** su come si è sviluppata la discussione fatta in classe sul problema, **corredata dalla scannerizzazione dei protocolli degli allievi**

GRAZIE!!