UN PONTE TRA TEORIA E PRATICA:
QUALE MATEMATICA OGGI IN CLASSE?
Primo corso di formazione
dell'Associazione Rally Matematico Transalpino Siena
Siena, 22-24 novembre 2019

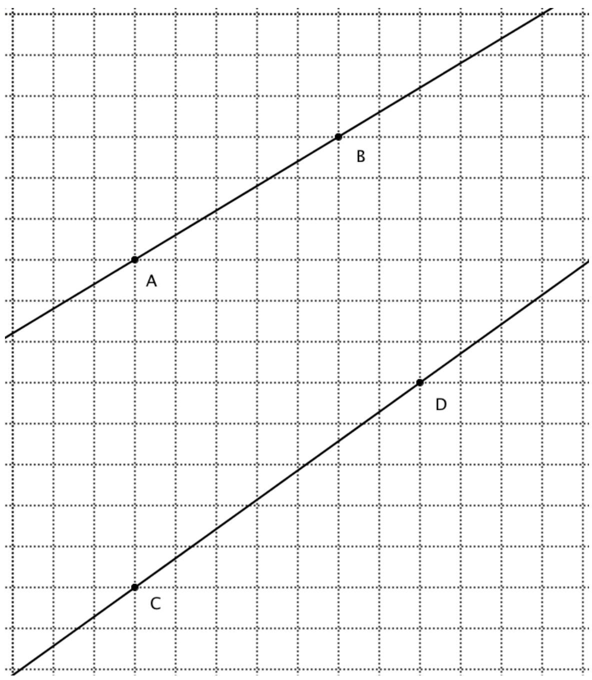
Laboratorio gruppo FUNZIONI

Vi proponiamo di analizzare due coppie di problemi tratti da gare del RMT.

Come possibile traccia di analisi, vi proponiamo alcune domande:

1) Come risolvereste voi i due problemi?
2) Come pensate che li possano risolvere studenti della categorie indicate?
3) Quali concetti i problemi mettono in gioco?
4) Quali difficoltà ed ostacoli gli studenti possono incontrare nella risoluzione?
5) Considerato che i due problemi sono simili:
    - quali analogie potete individuare fra i due testi?
    - quali differenze?
6) Quali aspetti del concetto di funzione sono presenti in questi problemi?
7) Si tratta di "buoni problemi" per far emergere questi concetti?

24.I.15. INTERSEZIONE (Cat. 7, 8, 9, 10)



Andrea traccia due rette su un foglio di carta quadrettata: una passante per A e B, l'altra per C e D, come vedete nel disegno.

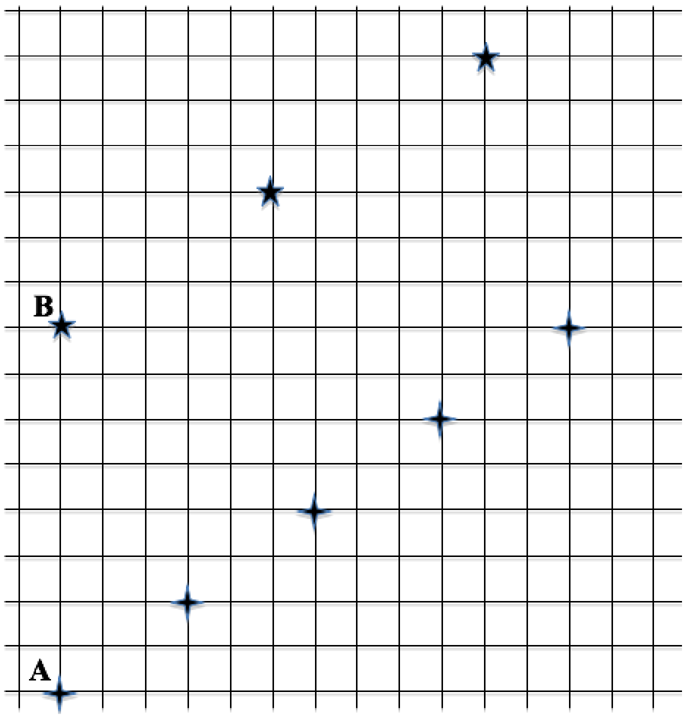
Egli osserva che se prolungasse queste due rette, su un foglio di carta quadrettata molto più esteso, le due rette si intersecherebbero.

Dove è situato questo punto d'intersezione?

(Datela sua posizione indicando di quanti quadretti ci si deve spostare verso destra e di quanti verso l'alto a partire dal punto C)

Spiegate come l'avete trovato.

27.I.15. PASSEGGIATA DI ROBOT SALTATORI (Cat. 7, 8, 9, 10)



Agata e Beatrice hanno programmato due robot saltatori per farli muovere in modo regolare su una griglia quadrettata. Ad ogni salto i due robot lasciano una impronta sulla griglia, indicata sulla figura con una stellina.

- Con ogni salto, il robot di Agata si sposta di 3 quadretti orizzontalmente verso destra, e di 2 quadretti verticalmente verso l'alto;
- Con ogni salto, il robot di Beatrice si sposta di 5 quadretti orizzontalmente, verso destra, e di 3 quadretti verticalmente verso l'alto.

Il robot di Agata parte della posizione A, mentre quello di Beatrice parte della posizione B. Su questa figura potete vedere le impronte dei loro primi salti.

Prolungando la quadrettatura verso destra e verso l'alto, ci sarà un punto d'intersezione sulla griglia quadrettata, sulla quale si troveranno le loro due impronte?

Se sì, quanti salti dovrà fare ognuno dei robot per arrivare al punto in cui le loro impronte si sovrappongono?

Se no, quanti salti dovrà fare ciascuno per arrivare al punto in cui le loro impronte hanno la distanza minima?

17.II.19. GARA DI CORSA (Cat 8, 9, 10).

Giorgio e Federico fanno una gara di corsa su una distanza di 30 m tra un albero A e un albero B.

Giorgio corre alla velocità di 10,8 km/h, mentre Federico corre alla velocità di 18 km/h.

Federico concede un vantaggio a Giorgio che partirà da un punto C situato tra i due alberi, a 3 metri dall'albero A.

Federico parte dall'albero A esattamente 3 secondi dopo la partenza di Giorgio.

Chi vincerà la corsa? Quanto tempo avrà corso ciascuno?

Spiegate il vostro ragionamento.

18.II.20. GITA IN BICICLETTA (Cat. 9, 10)

Due amici, Giovanni e Pietro, partono insieme una domenica mattina alle ore 8 per una gita di 100 km in bicicletta. Giovanni viaggia a 20 km/h e Pietro a 30 km/h.

Pietro fora malamente al 50-esimo km e si ferma per andare a cercare una gomma da sostituire. In tutto perde 1 h 20 min prima di poter ripartire. Alla fine, i due amici riescono a completare i 100 km stabiliti.

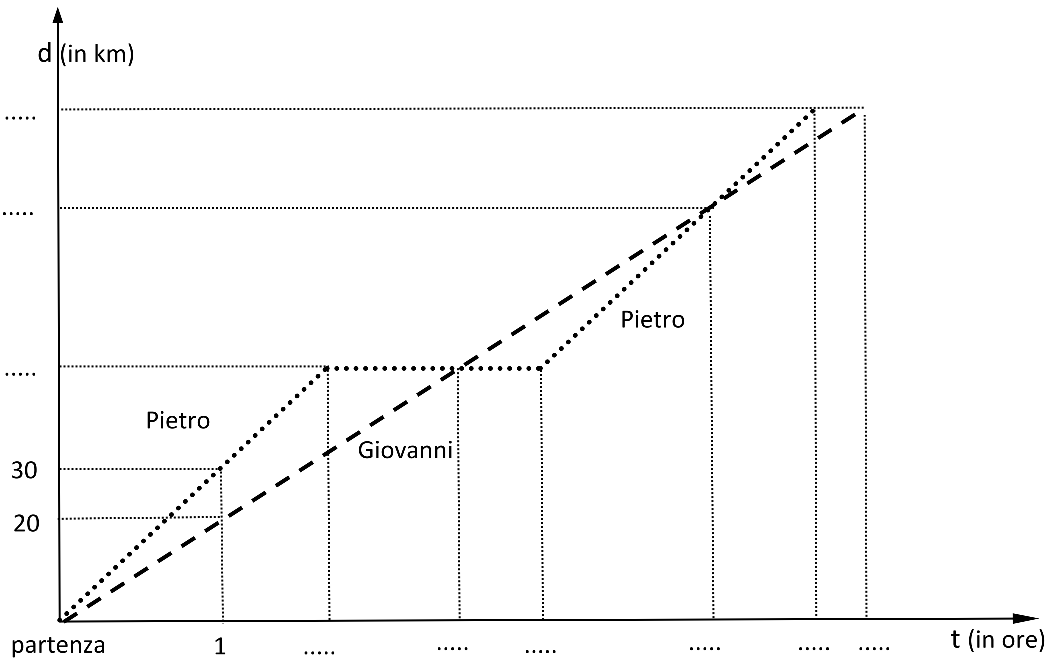
A che ora Giovanni raggiunge Pietro che era andato avanti?

A che ora Giovanni è arrivato al traguardo dei 100 km? E Pietro?

Pietro, dopo la sua foratura, sorpassa Giovanni? Se sì a che ora?

Spiegate i calcoli che avete fatto.

La situazione è rappresentata dal seguente grafico, che potrebbe essere utile completare:



Analisi a priori dei problemi proposti nel laboratorio:

24.I.15. INTERSEZIONE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Compito matematico

Trovare le coordinate del punto d'intersezione di due rette passanti ciascuna per due punti assegnati; i quattro punti si trovano su un foglio quadrettato; l'intersezione si trova fuori dal foglio.

Analisi del compito

- Osservare che la retta AB, a partire da A, si innalza di 3 quadretti per uno spostamento orizzontale verso destra di 5 quadretti e che la retta CD, a partire da C, si innalza di 5 quadretti per uno spostamento orizzontale di 7 quadretti. Osservare inoltre che fra A e C c'è uno scarto di 8 quadretti.
- A partire da queste informazioni, disegnare le rette su un foglio quadrettato più grande o prolungarle su altri fogli e constatare che questa procedura esige una grande precisione per arrivare a trovare le "coordinate" del punto di intersezione, per esempio segnando progressivamente tutti i punti della retta (AB) che sono sulle intersezioni della quadrettatura (di 5 in 5 secondo le ascisse) e verificandone i punti corrispondenti della retta (CD) della stessa ascissa.

Oppure: per via aritmetica, calcolare che per uno spostamento verso destra di 35 quadretti (mcm di 5 e 7), la retta (AB) "sale" di 21 quadretti (7 x 3) e la retta (CD) "sale" di 25 quadretti (5 x 5) quindi che le due rette si sono "avvicinate" di 4 quadretti (25 - 21).

- Osservare allora che bisogna dunque ancora spostarsi di 35 quadretti orizzontalmente verso destra affinché le rette si intersechino (poiché i punti A e C sono distanti di 8 quadretti). Il punto di intersezione è quindi a 70 quadretti a "destra" di C e 50 quadretti più "in alto" di C.

Oppure per via algebrica: determinare in un sistema di assi ortogonali, l'intersezione di due rette. Per esempio, con il punto C come origine le equazioni delle rette (CD) e (AB) sono: $y = 5/7x$ et $y = 3/5x + 8$ la cui intersezione è (70; 50).

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (70 quadretti orizzontalmente verso destra e 50 verso l'alto a partire da C) con spiegazione chiara e precisa (disegno, tabella di valori comparativi, sistema di equazioni)

3 Risposta corretta con spiegazione insufficiente

oppure risposta errata causata da un errore di calcolo (ad esempio nella risoluzione del sistema di equazioni) ma spiegazione chiara

2 Risposta corretta senza alcuna spiegazione

oppure risposta imprecisa con uno scarto di 1 o 2 quadretti a causa di un disegno poco preciso

1 Inizio di ragionamento corretto (abbozzo di una tabella di valori, scrittura delle equazioni, disegno con imprecisione da 3 a 5 quadretti)

0 Incomprensione del problema

27.I.15. PASSEGGIATA DI ROBOT SALTATORI (Cat. 7, 8, 9, 10)

Compito matematico

Determinare il punto di intersezione di due percorsi su una quadrettatura realizzati per salti regolari successivi e trovare il numero di salti per arrivarvi.

Analisi del compito

- Osservare le tracce dei robot, prolungare gli spostamenti (mentalmente o per costruzioni effettive) e capire che le tracce si posizionano su due rette e che bisognerà «uscire dal foglio» per trovare il punto di intersezione **.**

Per trovare il punto di intersezione:

«Prolungare» materialmente la quadrettatura con un collage, o lavorare su di un foglio a quadretti più piccoli e costruire le tracce dei due robot per arrivare al punto comune, e constatare che si arriva dopo 40 salti di A e 24 salti di B.

Oppure:

lavorare a livello numerico osservando che le tracce sono l'una al di sopra dell'altra alla partenza, poi «spostate» orizzontalmente, poiché si ritrovano l'una al di sopra dell'altra dopo 15 quadretti o 5 spostamenti di 3 per A e 3 spostamenti di 5 per B, diminuendo di 1 (da 8 a 7) la distanza (verticale) tra i due, ricavarne che la distanza sarà nulla dopo 8 spostamenti orizzontali di 15.

Oppure:

esprimere le posizioni delle tracce da A a B con le loro coordinate, la cui origine è, per esempio, la partenza da A, una per una, poi eventualmente 15 per 15:

A	salto	0	1	2	3	4	5	…	10	…	20	…	**40**
	orizz.	0	3	6	9	12	15	…	30	…	60	…	**120**
	vertic.	0	2	4	6	8	10	…	20		40		**80**
B	salto	0	1	2	3	4	5	6	…	…	12	…	**24**
	orizz.	0	5	10	15	20	25	30	…	…	60	…	**120**
	vert.	0	3	6	9	12	15	18	…	…	36		72
	+8	8	11	14	17	20	23	26	…	…	44	…	**80**

Oppure:

algebricamente determinare l'equazione delle due rette osservando le tracce per A: $y = 2x/3$, per B $y = 3x/5 + 8$, poi le coordinate dei loro punti di intersezione (120; 80) e calcolare i numeri dei salti.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta e completa (Sì, A: 40 salti, B; 24 salti) con spiegazione dettagliata (o graficamente o verbalmente o algebricamente.

3 Risposta corretta con spiegazione incompleta o poco chiara

2 Uso di una delle possibili strategie corrette ma errore nell'individuazione del punto di intersezione

oppure e individuazione del punto d'intersezione dei percorsi su un disegno senza rispondere esplicitamente alla domanda sul numero dei salti

1 Inizio di soluzione corretta: disegno dei primi passi successivi, disegno delle rette risultanti senza individuare il punto di intersezione

oppure risposta «No» a causa di un errore di disegno o di calcolo, ma coerente con disegni o calcoli

0 Incomprensione del problema

oppure risposta nessuna intersezione

Livello: 7, 8, 9, 10

Origine: Gruppo Funzioni e Successioni

17.II.19. GARA DI CORSA (Cat 8, 9, 10)

Ambito concettuale :

- Aritmetica: rapporti,
- Misura: velocità, distanza, tempo
- Algebra: funzioni

Analisi del compito

- Capire che Federico è più rapido di Giorgio e che, se la distanza tra i due alberi è sufficiente, può raggiungere il suo amico e superarlo.
- Tradurre in m/s le velocità date: Giorgio percorre 3 metri al secondo (10 800/3 600) e Federico 5 metri al secondo (18 000/3 600).
- Interpretare numericamente il vantaggio accordato a Giorgio: egli parte dal punto C, situato a 3 metri da A, e percorre 9 metri durante i 3 secondi di attesa di Federico. Giorgio ha dunque 12 metri di vantaggio quando Federico comincia la sua corsa.
- Dedurre che, quando Federico parte per la sua corsa di 30 metri, a Giorgio restano 18 metri da percorrere prima dell'albero B. Poiché Giorgio fa 18 metri in 6 secondi e Federico fa 30 metri in 6 secondi, essi arriveranno insieme all'albero B, e non si avrà così un vincitore. Giorgio avrà corso in 9 secondi e Federico in 6 secondi.

Oppure: scrivere le due funzioni corrispondenti alle corse di Giorgio e Federico, rispettivamente: $CB = V_G \times t_G$ e $AB = V_F \times t_F$, con $CB = 27$ m, $AB = 30$ m, $V_G = 3$ m/s, $V_F = 5$ m/s. Il tempo del percorso di Giorgio è quindi $t_G = 9$ s, quello di Federico è $t_F = 6$ s, ma poiché Giorgio è partito 3 s prima di Federico, essi arriveranno insieme all'albero B.

Attribuzione dei punteggi

4 Soluzione corretta (nessun vincitore, Giorgio in 9 secondi e Federico in 6 secondi), con procedimento coerente e completo, chiaramente esposto

3 Soluzione corretta, ma con spiegazioni poco chiare ed una interpretazione incompleta dei risultati

2 Soluzione corretta ma senza spiegazioni, oppure qualche spiegazione e un errore di calcolo

1 Inizio di ricerca corretta ma che non tiene conto di tutti i dati (velocità, vantaggio, ecc.)

0 Incomprensione del problema

Livello: 8, 9, 10

Origine: Milano

18.II.20. GITA IN BICICLETTA (Cat. 9, 10)

Ambito concettuale

- Geometria e misura: tempo e velocità, calcoli orari
- Geometria e rappresentazione grafica: rappresentazione cartesiana di uno spazio in funzione del tempo

Analisi del compito

- Notare che tutte le domande si riferiscono alla cronologia della storia. Si deve pertanto descrivere tutto in termini di orari.
- Alla velocità media di 30 km/h, Pietro ha percorso 50 km in 1h e 40 mn (30 km in un ora e 20 km in 2/3 di ora).
- Al momento della foratura, Pietro deve ancora fare 50 km, ovvero gli mancano ancora 1 h e 40 mn al traguardo dei 100 km.
- Pietro impiega 1h e 20 mn per riparare la bicicletta. Egli quindi riparte 3 h (1 h e 40 mn + 1h e 20 mn) dopo l'inizio della gita e pertanto impiega 4 h e 40 mn per percorrere i 100 km. Egli arriva alle 12 h e 40 mn.
- Alla velocità media di 20 km/h, Giovanni percorre 50 km in 2 h e 30 mn. Egli dunque raggiunge Pietro alle10 h e 30 mn.
- Giovanni impiega 5 ore per percorrere i 100 km della gita. Egli arriva alle ore 13, cioè 20 mn dopo Pietro.
- Si può calcolare l'ora in cui Pietro sorpassa Giovanni utilizzando le equazioni orarie dei loro spostamenti (d_G e d_P).
  - Per Giovanni: $d_G = 20\ t$.
  - Per Pietro, dopo 50 km, 3 ore dopo la loro partenza della mattina: $d_P = 30\ (t – 3) + 50$.
  - L'ora in cui Pietro sorpassa Giovanni è allora data dall'equazione $20\ t = 30\ (t – 3) + 50$, da cui $t = 4$ ore. Pietro ha superato Giovanni a mezzogiorno. Essi avevano allora percorso 80 km.

Oppure: utilizzare il grafico per stimare le coordinate del punto di incontro: ora e distanza percorsa (4 ore, 80 km)

Oppure: fare un ragionamento più elementare grazie alla semplicità dei dati.

- Quando Pietro è ripartito alle ore 11, Giovanni aveva fatto 60 km (3 ore a 20 km/h). Pietro aveva dunque uno svantaggio di 10 km. In un'ora egli percorre 30 km, mentre Giovanni fa solo 20 km. Pietro quindi ha sorpassato Giovanni un'ora dopo essere ripartito, a mezzogiorno. In quel momento Giovanni aveva fatto 80 km.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposte corrette (10 h 30 mn; arrivo di Giovanni alle ore 13, arrivo di Pietro alle ore 12 e 40 min; Pietro sorpassa Giovanni a mezzogiorno), con spiegazioni chiare alle prime tre risposte e un metodo coerente per l'ultima

3 Le prime tre risposte giuste con spiegazioni chiare e esplicitazione dei calcoli

2 Le prime due risposte giuste e giustificate, un errore di calcolo o di interpretazione per l'arrivo di Pietro

1 La prima risposta giusta, con un ragionamento che mostra la comprensione del concetto di velocità

0 Nessuna risposta giusta o incomprensione del problema

Livello: 9, 10

Origine: Gruppo funzioni