UN PONTE TRA TEORIA E PRATICA:
QUALE MATEMATICA OGGI IN CLASSE?

22 - 24 novembre 2019

Hotel Garden - Siena

associazione Rally Matematico Transalpino Siena

Visualizzazione spaziale

C. Cateni - L. Fazzino – R. Santori

Il nostro gruppo…

- Nel 2006 a Parma, nasce un gruppo di lavoro per le problematiche dell'insegnamento apprendimento della geometria solida. Atti Parma2006

- Le notevoli difficoltà incontrate dagli allievi nell'affrontare i problemi di natura geometrica del Rally (Crociani ,Doretti ,Salomone 2001)hanno condotto il gruppo ad una riflessione sull'insegnamento della geom. che ,soprattutto nella scuola media, tende a privilegiare una eccessiva e precoce astrazione, la quale mostra presto tutta la scarsa efficacia didattica(Damiani,1996)

La visualizzazione spaziale

Nel 1987 Villani scrive:
La visualizzazione spaziale è una delle abilità alle quali non viene data la giusta importanza

Spesso la geometria viene affrontata a partire dalla osservazione sommaria degli oggetti tridimensionali per passare subito ad uno studio serio a partire dagli enti fondamentali.

L’approccio tradizionale è innaturale per i nostri ragazzi perché richiede loro una notevole capacità di astrazione

Quindi, nei primi anni di scolarità , **è importante costruire concetti attraverso esperienze spaziali, cioè attraverso percorsi che passino continuamente dal 2d al 3 d e viceversa che possano portare i ragazzi a compiere piccoli passi verso l’astrazione.**

… quindi

Per riconoscere le proprietà di un solido
bisogna spostarlo, osservarlo da diversi punti di vista, costruirne un’immagine….. un modello
Solo dopo questa fase sperimentale ci si può addentrare nelle analisi più formali, riconoscere proprietà e calcolare aree e volumi

I problemi dell'RMT

-La scelta del procedimento risolutivo non è di solito deducibile automaticamente dal testo: ciò crea un momento di smarrimento che può divenire una sfida a procedere;

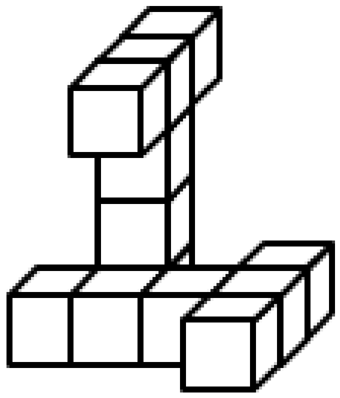
-Spesso le strategie risolutive sono molto diverse fra loro: questo consente una discussione costruttiva nel gruppo e fra i gruppi;

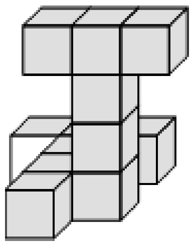
-Uno stesso problema può fare riferimento a più nuclei dei programmi : ciò consente agli alunni di acquisire una visione più organica della matematica.

PUNTI DI VISTA (Cat. 5, 6, 7) ©ARMT.2008 - 16° - finale

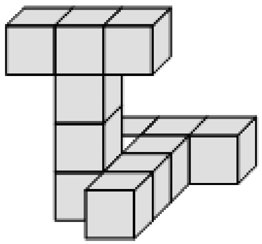
Andrea ha fatto una costruzione con alcuni cubi. Ecco come si presenta vista frontalmente.

Fra i disegni (a, b, c, d, e, f) riportati qui sotto, individuate quelli che rappresentano la costruzione di Andrea e precisate se è vista da dietro, da destra o da sinistra.

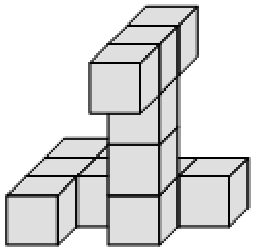




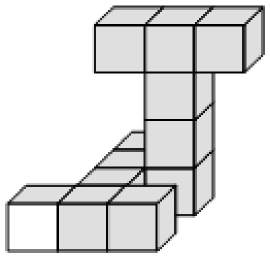
a



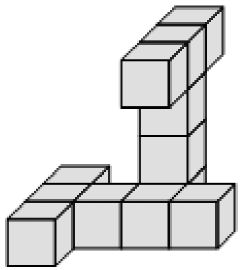
b



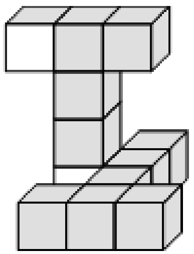
c



d



e



f

Cosa deve fare l’allievo:

- Ruotare mentalmente la costruzione di un quarto di giro o di mezzo giro per osservarla da un altro punto di vista.
- Confrontare l’immagine mentale della costruzione ruotata con ognuno dei disegni.

contenuti matematici: visualizzazione spaziale

Tutte le rotazioni sono con asse verticale e le simmetrie rispetto ad un piano verticale. Partendo dalla figura iniziale si ottengono le 6 figure

- **a** con una rotazione di un quarto di giro e una simmetria
- **b** con una rotazione di ¼ di giro
- **c** rotazione di mezzo giro
- **d** con una rotazione di un quarto di giro
- **e** con una simmetria rispetto a un piano
- **f** con una rotazione di di ¼ di giro e una simmetria

b **da sinistra**
c **da dietro**
d **da destra**

I cubi di Nicola

Rally: 26.II.18 ; categorie: 6, 7, 8

Nicola ha tanti cubetti di legno che vuole colorare in modo che:

- le facce opposte siano dello stesso colore
- le facce vicine, cioè quelle che hanno uno spigolo in comune non abbiano lo stesso colore

Ha a disposizione cinque colori: arancione, blu , giallo , rosso e verde

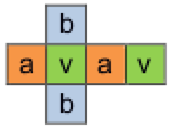
Quanti cubi diversi può realizzare Nicola?

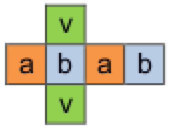
Spiegate come avete trovato la vostra riposta

Contenuti matematici

Capire che:

- sono necessari tre colori per colorare un cubo, dato che ha solo tre coppie di facce opposte e che le facce vicine devono avere colori differenti.
- due cubi colorati correttamente sono diversi se differiscono almeno per un colore.
- l'ordine di scelta non ha importanza.
- Scegliere i colori a tre a tre e individuare tutte le possibili combinazioni





10 combinazioni possibili, quindi vi sono 10 cubi diversi.

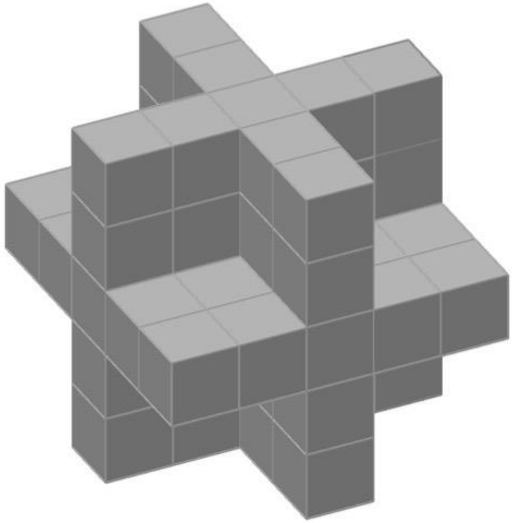
A,B,V, A,B ,G A,B,R A ,G,V A,G , R A , R ,V

B, G, V B, G, R B, R, V G, R, V

Il fermacarte svizzero

Rally 27°, 2° Prova, N° 6 Categorie: 4, 5, 6

In una vetrina è esposto il fermacarte che vedete in figura, formato da tanti cubetti magnetici. Giulia osserva da vicino, lo prende e lo rigira tra le mani e si accorge che le parti che nella figura non sono visibili, sono perfettamente uguali a quelle che si vedono.
Giulia si accorge che può facilmente contare i cubetti da cui è formato senza smontarlo.
Da quanti cubetti è formato il fermacarte?
Spiegate come avete trovato la soluzione.



. Compito per la risoluzione e…. saperi mobilizzati

Determinare il numero di cubetti da cui è formato un poliedro non convesso che è parte di un cubo, avente gli stessi assi e piani di simmetria del cubo.

- Osservare come è fatta la figura e tenere presente che la parte che non si vede è uguale a quella sul davanti
- Capire che il fermacarte è formato da 5 strati di cubetti: 4 tutti uguali e a forma di "croce" e uno centrale a forma quadrata. (*se si ammette che non ci sono spazi all'interno).
- Contare i cubetti: in ciascuna "croce" ci sono 9 cubetti, quindi $9 \times 4 = 36$ cubetti; in quello centrale ce ne sono $5 \times 5 = 25$; complessivamente il fermacarte è composto da $36 + 25 = 61$ cubetti magnetici.

- Capire che il fermacarte è formato da 5 strati di cubetti: 5 tutti uguali e a forma di "croce" più 4 prismi
formati ciascuno da 4 cubetti.
- Contare i cubetti: in ciascuna "croce" ci sono 9 cubetti, quindi $9 \times 5 = 45$ cubetti, in ciascun prisma ci sono 4 cubetti, quindi 4x4=16 cubetti; complessivamente il fermacarte è composto da $45 + 16 = 61$ cubetti magnetici.

Comprendere che il fermacarte può essere inserito in un cubo “immaginario” il cui spigolo è 5 volte lo spigolo di un cubetto magnetico e quindi di volume $5^3 = 125$ cubetti.

Capire quindi che il volume del fermacarte è dato dalla differenza tra il volume del cubo immaginario e quello di 8 cubetti di spigolo 2, che sono stati tolti dagli otto vertici del cubo ($125 - 2^3 \times 8 = 61$).

Oppure:

- Capire che il fermacarte può essere scomposto in senso verticale come costituito da 4 colonne doppie, ognuna formata da 10 cubetti, più quella centrale formata da 5 cubetti, più i 4 pezzi rimasti nella parte di mezzo costituiti da (4x4) cubetti; quindi avremo (4x10)+5+(4x4) = 61 cubetti.

Si possono immaginare numerose altre strategie per conteggiare i cubetti.

L’errore più frequente per tutte e tre le categorie è stato quello, dopo aver scomposto il solido in 3 piani orizzontali, di contare solo i cubetti visibili, dimenticando di contare qualche cubetto o nelle croci o nella parte di mezzo o in entrambe le situazioni (oltre il 70%).

Nessuno lo riconosce come parte di un cubo

INDICAZIONI DIDATTICHE

- Essere costruito con dei cubetti componibili :
- per favorire la visualizzazione delle parti nascoste;
- per offrire un modello già costruito da osservare alla cattedra e stimolare la visualizzazione spaziale una volta al posto, inoltre può servire come strumento di autocorrezione.

Nessuno ha riconosciuto il fermacarte come parte di un cubo, sarebbe opportuno porre la domanda specifica:

che forma potrebbe avere la scatola che contiene perfettamente il fermacarte?

Oppure

Chiedere: quanti cubetti potrebbero servire per completare la costruzione del poliedro da cui è stato ricavato il fermacarte.

Che poliedro è?

Spunti di approfondimento

- **Ad una classe 3^ possiamo chiedere qual è il minor numero di cubetti necessario per costruire un fermacarte simile a questo?**

- **Alle 1^ e 2^ S. di 2° Grado** il problema può essere risolto anche per via algebrica infatti il numero deicubetti può essere calcolato come la differenza fra il cubo di un numero dispari il cubo del numero precedente

$$\mathbf{(2n+1)^3-(2n)^3.}$$

Lavoriamo con i cubetti

Se hai 8 cubetti

- costruisci un parallelepipedo
- Quali sono le sue dimensioni?
- Riesci a costruirne uno diverso dal precedente?
- Ne puoi costruire altri? Disegnali e confrontali (cosa hanno in comune?)
- Conta le facce esterne che vedi? È sempre lo stesso numero?
- C’è un numero minore degli altri? In quale caso?

Riflettere sul fatto che sono solidi equivalenti (stesso volume) ma cambia sup. totale

Prova stessa situazione con 12 cubetti unitari

Hai un cubetto di lato unitario

- Se vuoi costruire un cubo di lato doppio quanti cubetti servono? Prova
- E se vuoi il lato triplo? E quadruplo?
- Puoi prevedere quanti cubetti ti serviranno per fare un cubo con il lato 10 volte il primo?
- Spiega in che modo hai cercato di calcolare il numero dei cubetti.

In una scatola di spigolo 12   6 e 8 quanti cubetti puoi inserire? Come hai ragionato?

Se volessi riempire la scatola con cubetti di lato 3 unità, ce la potrei fare? Quanti mi servirebbero? Perché?

Piet Hein e il mondo a cubetti

Chi considera il gioco
nient'altro che un gioco,
e le cose serie
sempre sul serio,
ha un po' frainteso
entrambe le cose.

La via della saggezza
La via della saggezza?
E' evidente
e molto semplice:
sbaglia,
sbaglia
e sbaglia ancora,
ma sempre meno,
meno
e meno.

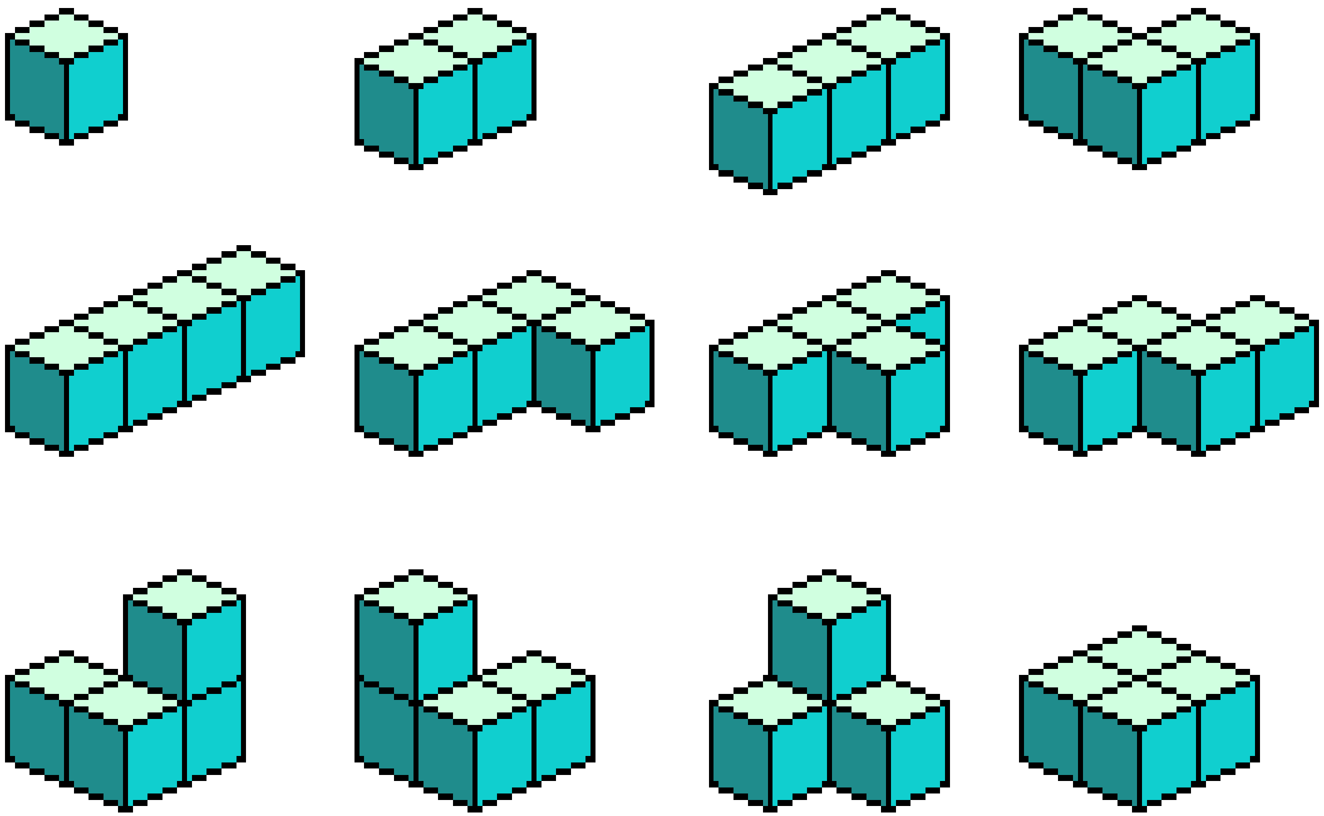
Un giorno Hein stava seguendo una lezione di fisica quantistica tenuta da Heisenberg e, mentre il grande fisico descriveva una spazio diviso in celle cubiche, gli venne spontaneo chiedersi quali figure, costruite con cubetti tutti uguali, aventi almeno una faccia in comune, potessero popolare quello spazio.

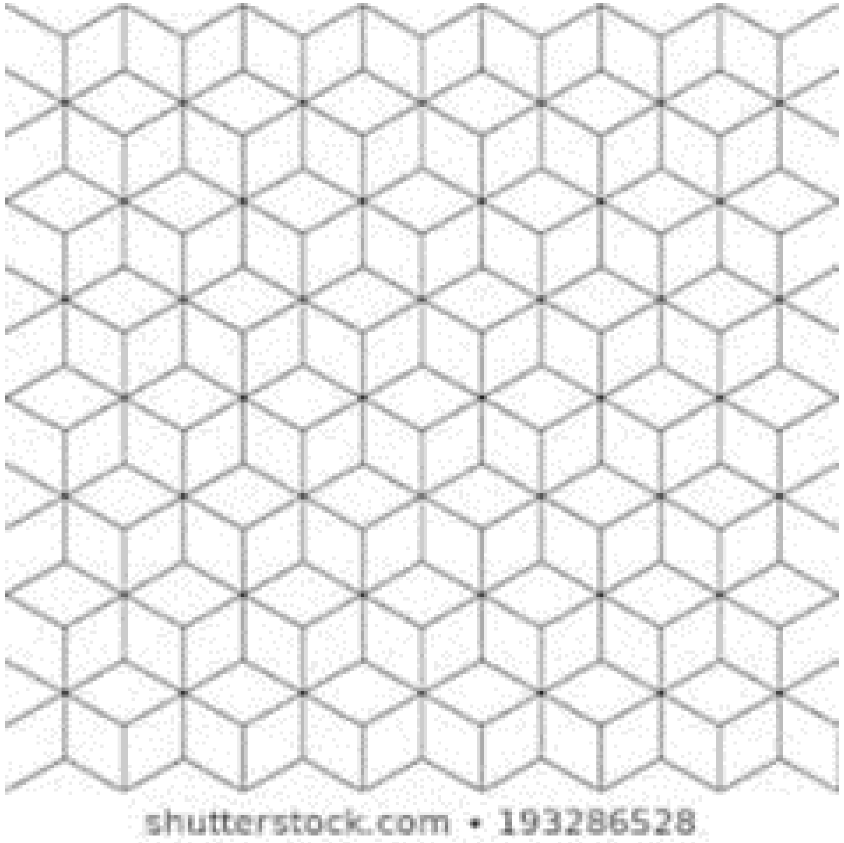
Rientrato dalla lezione si procurò una serie di cubetti e cominciò a cercare le forme possibili: iniziò con un cubetto, poi con due, con tre e infine con quattro. Così ottenne 12 forme diverse.

Hein decise di scartare il cubetto singolo e tutti i parallelepipedi lasciando solo le forme «non lineari».

Sapresti trovare tutte le forme rimaste ad Hein? (con l'aiuto dei cubetti). Disegnali sul quaderno.

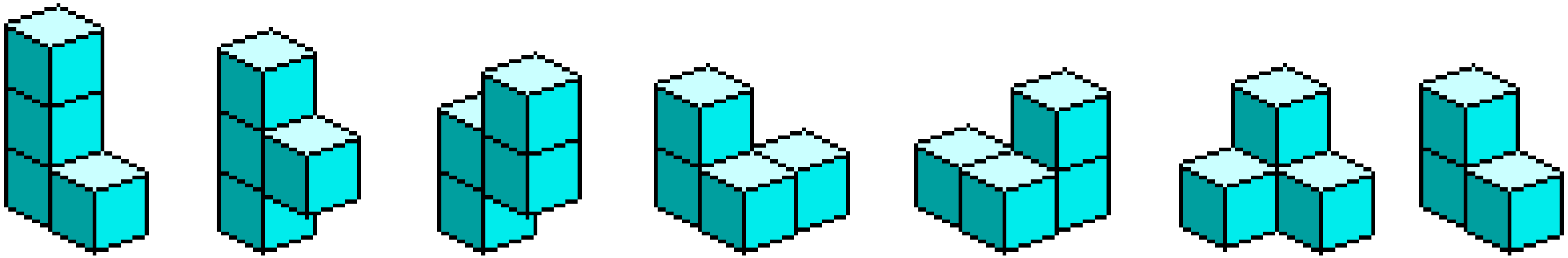
I 12 pezzi





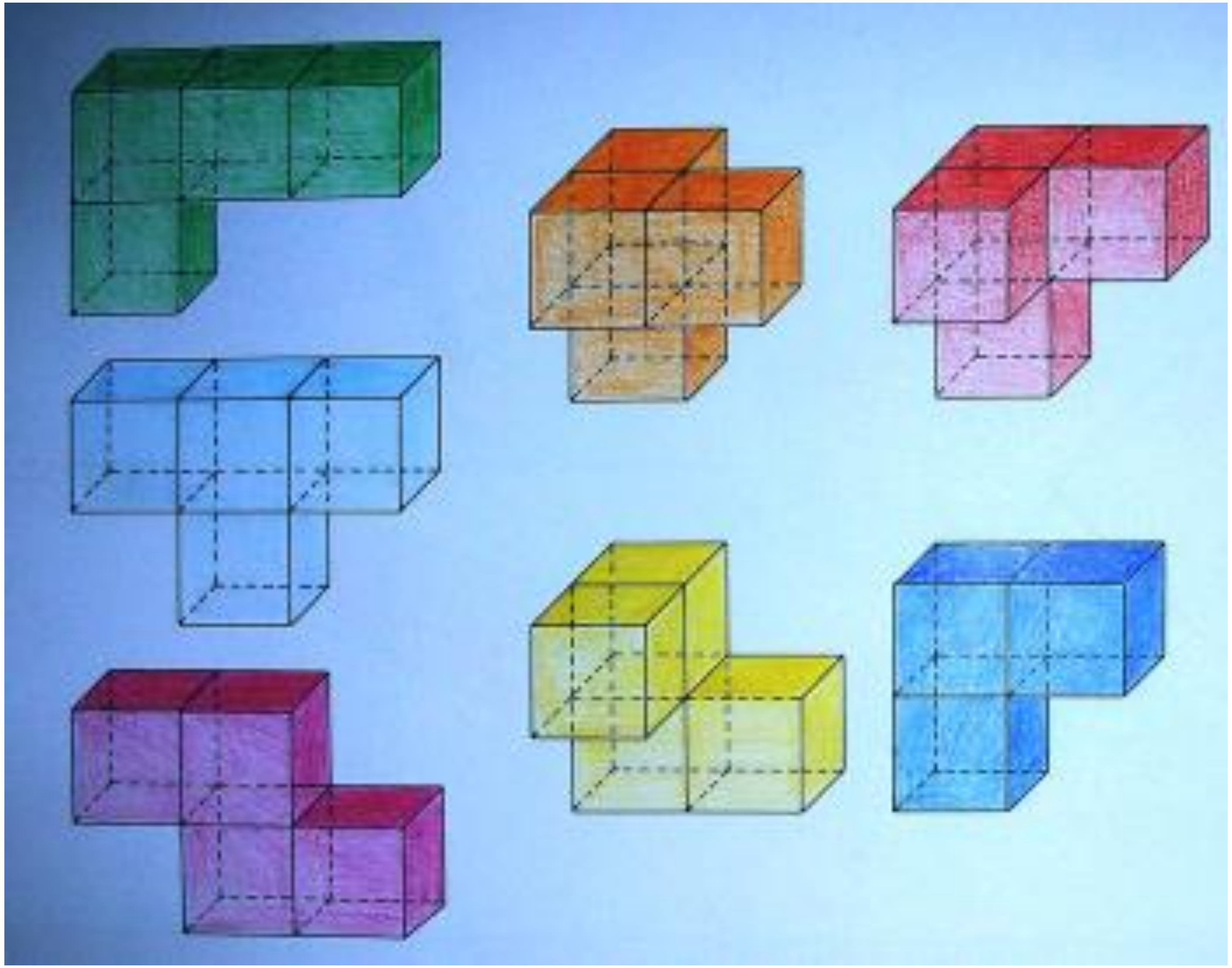
Per disegnare i pezzi ci possiamo aiutare con delle schede apposite.

Eliminando i parallelepipedi



Restano i 7 poliedri convessi

Sette pezzi facili …o no ?



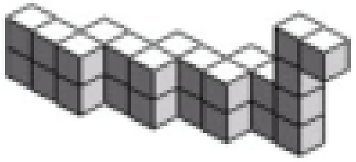
Due di questi sono speculari tra di loro. Quali sono?

Cubo Soma

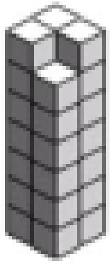
Con queste forme Hein costruì un cubo 3x3x3: lo chiamò Cubo Soma facendo riferimento all'ipotetico mondo futuro di Aldous Huxley.

Ma sono moltissime le figure che si possono realizzare con i sette pezzi… proviamo!

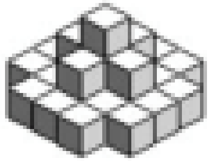
Sapresti ricostruire il cubo di Hein?



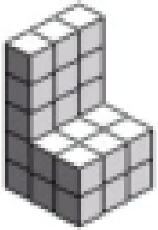
Il serpente



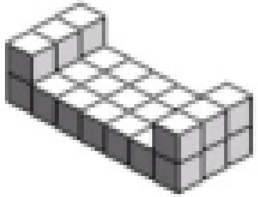
La torre



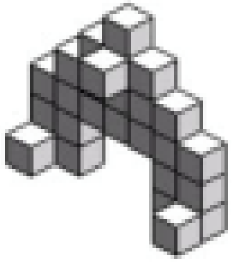
La piramide



La sedia

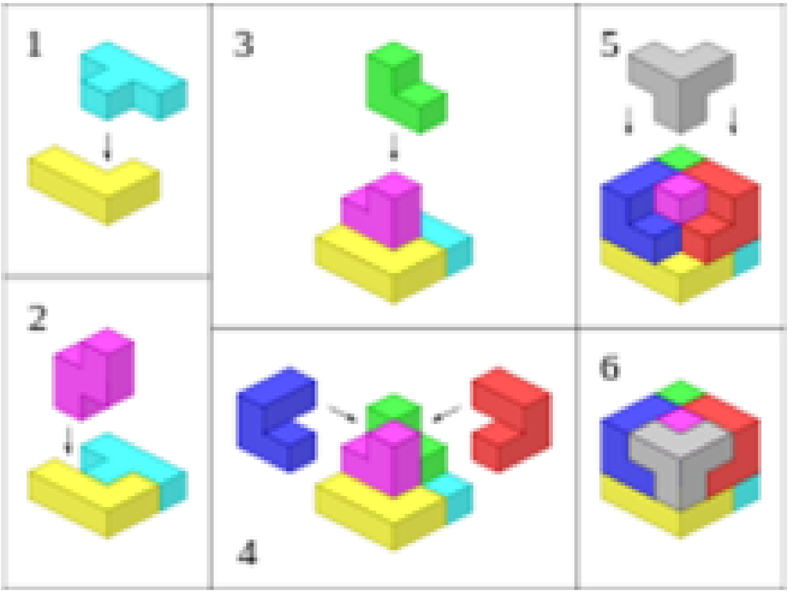


Il letto



L'arco

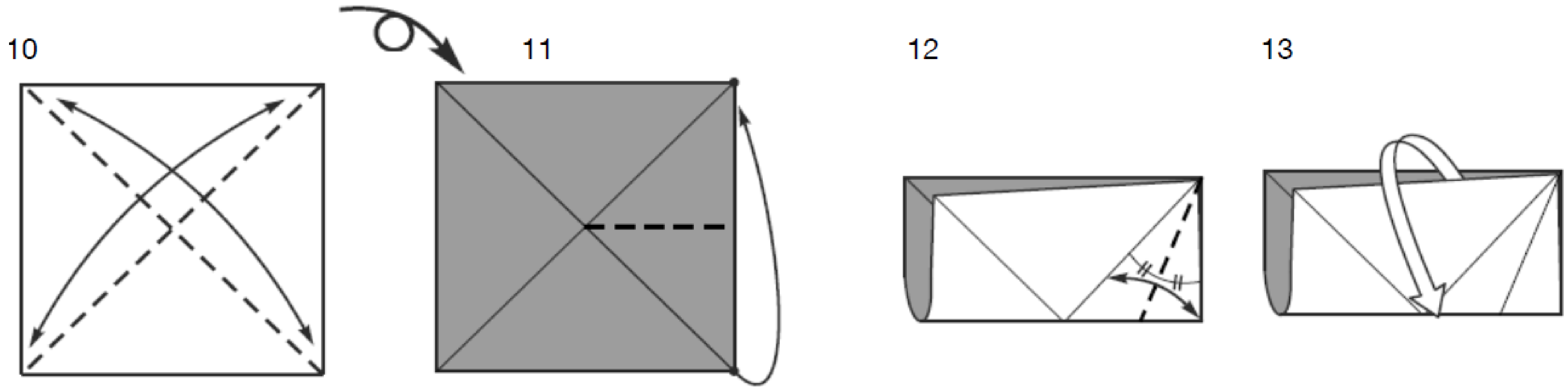
Sono migliaia le figure che si possono costruire con i sette pezzi.

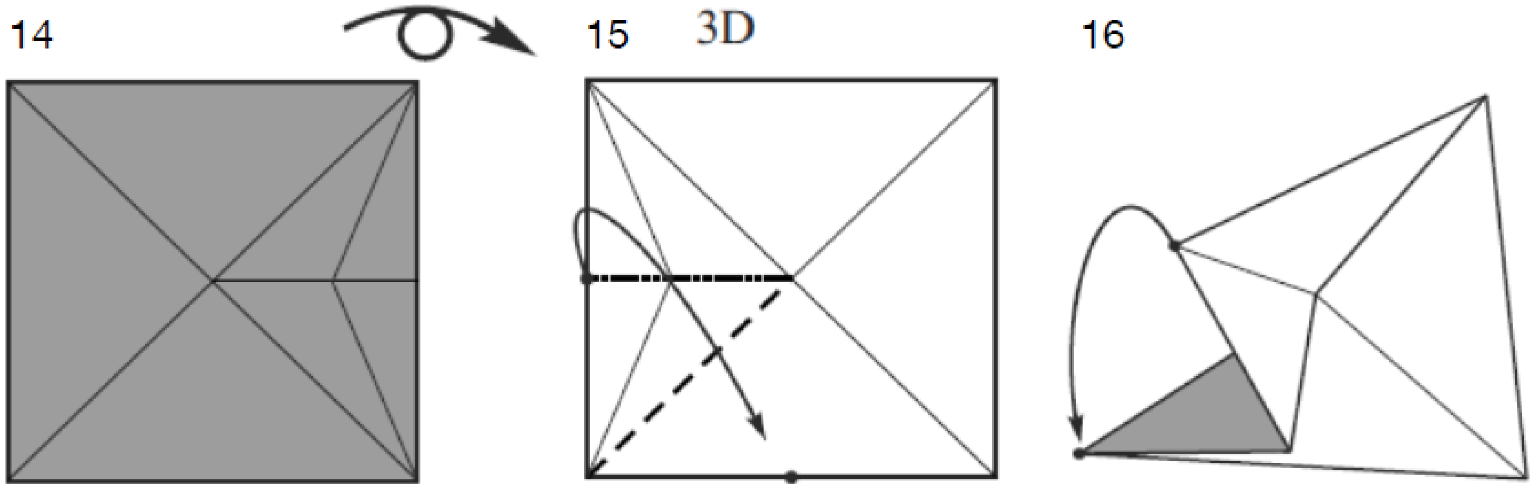


J.H. Conway and M.J.T. Guy, nel 1961, stabilirono che esistono 240 modi diversi di ricomporre il cubo 3 x 3 x 3, escludendo simmetrie e rotazioni.

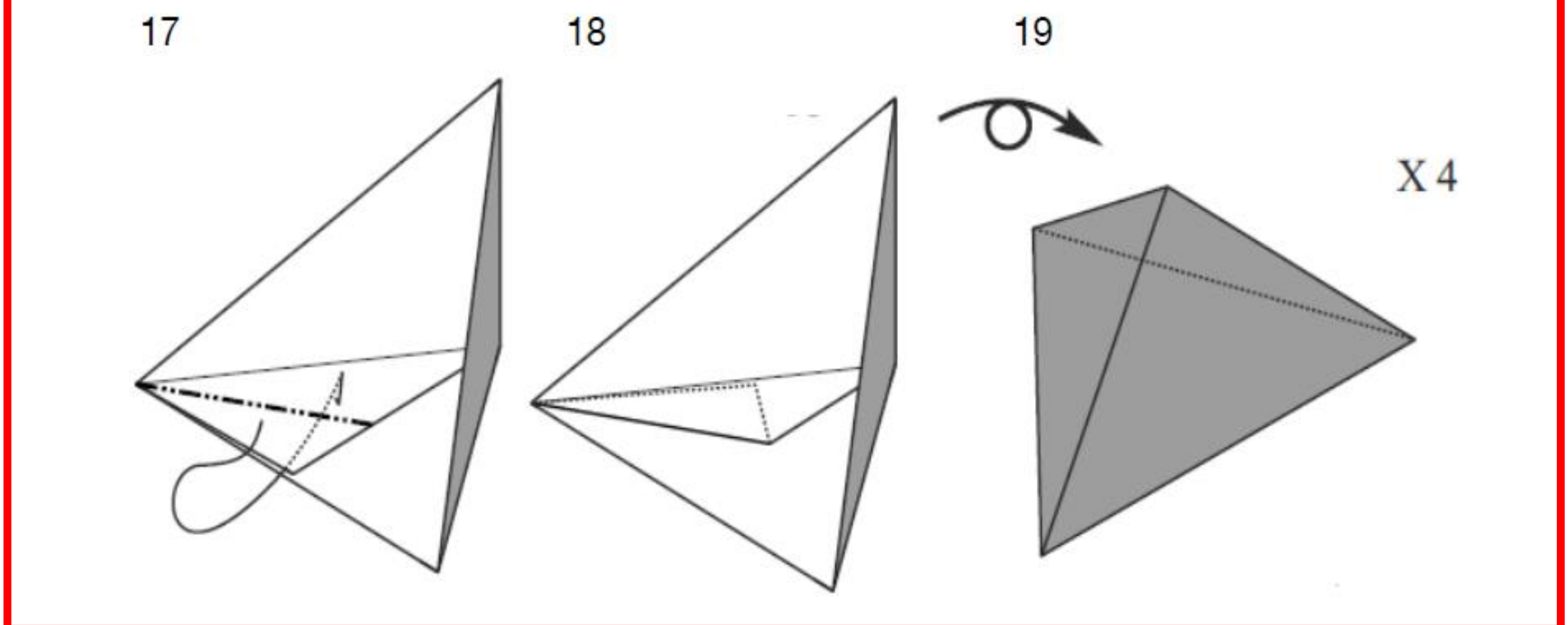
https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/probegio/GAMEMATH/Cubo%20Soma/Cubo%20Soma.htm

Quanti «Cappellini» da un cubo?

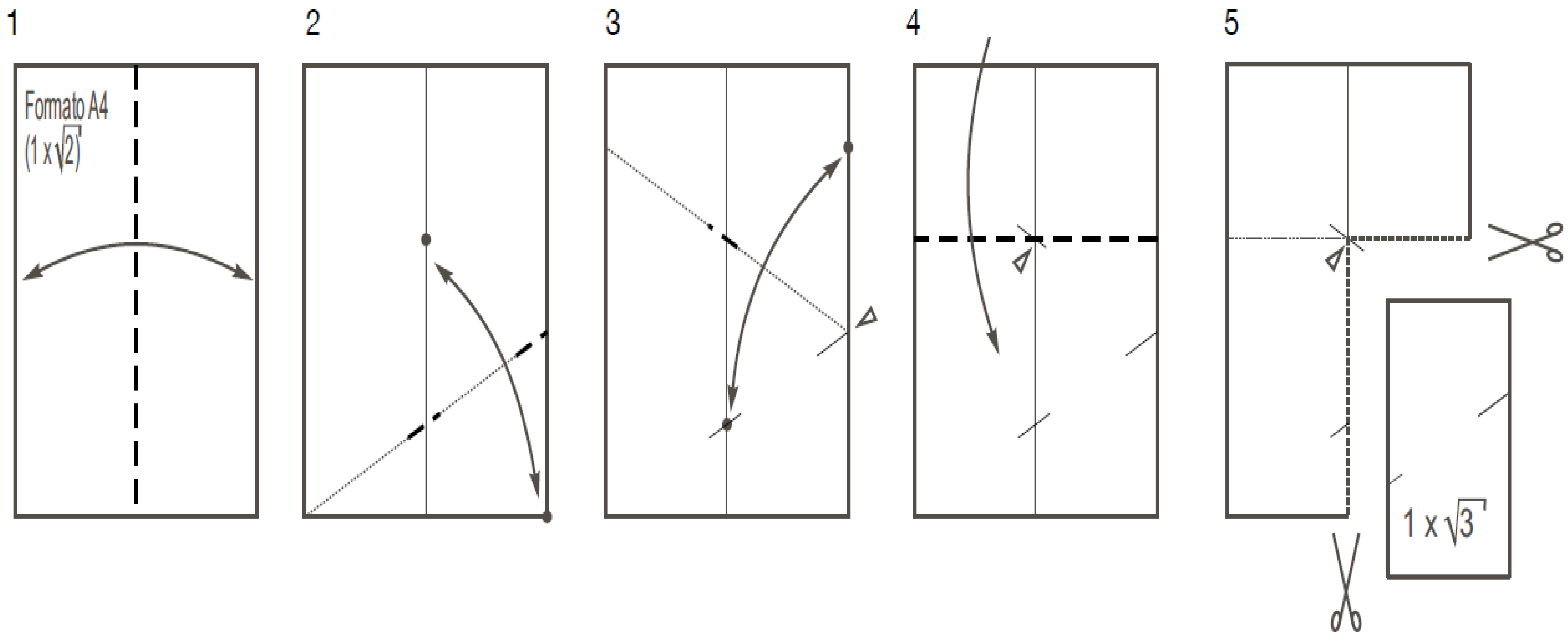




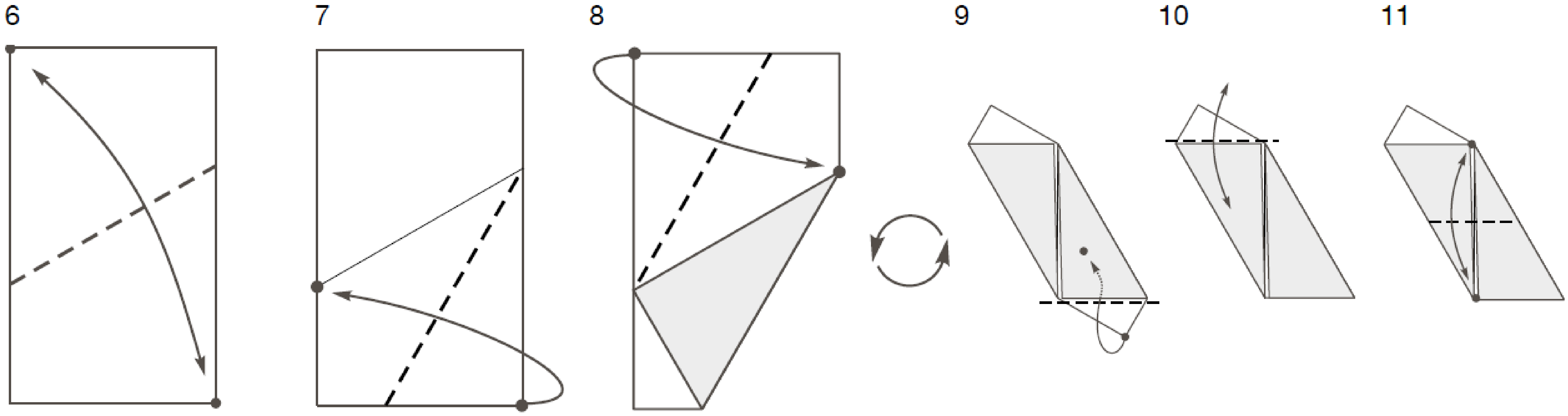
Da un quadrato
di lato 7cm

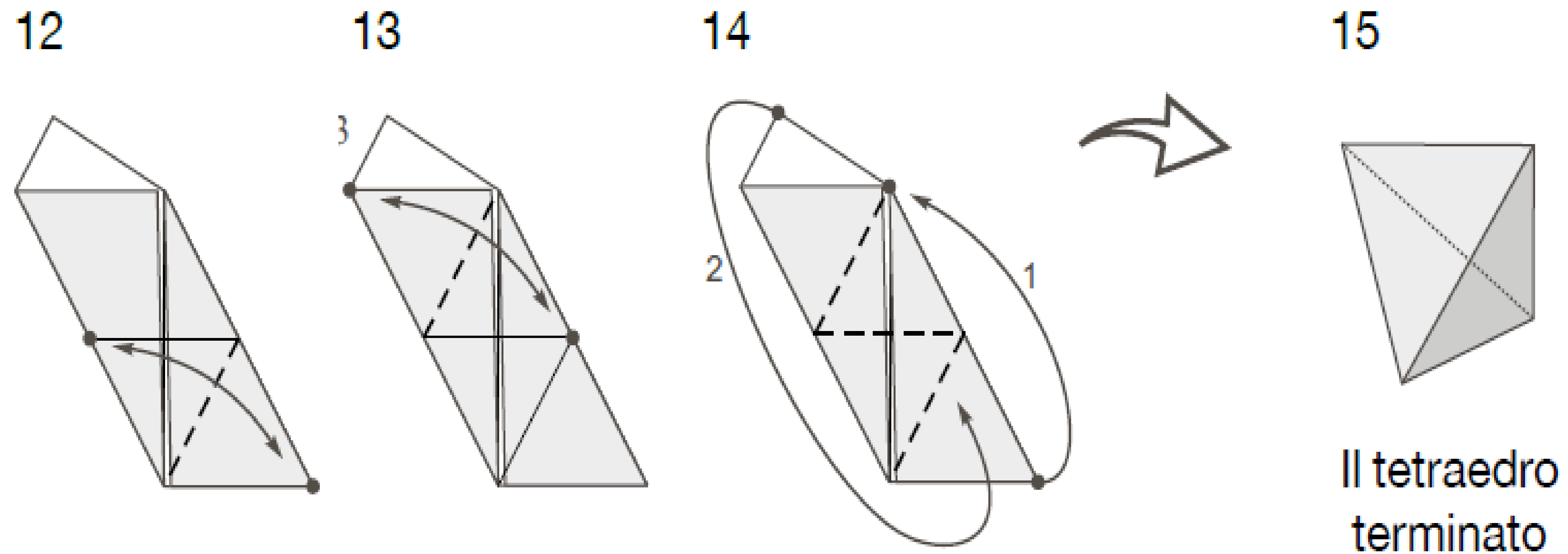

17
18
19
X 4

Da un A4 al rettangolo 1x√3



Il tetraedro





Quindi il cubo è fatto da 4 piramidi - cappello e un tetraedro

Spesso, risolvere problemi significa semplice o meccanica applicazione di conoscenze apprese in precedenza usare procedure ripetitive, basate sull'applicazione di regole o di formule.

Gli alunni poco o per nulla abituati al ragionamento, di ideazione o di intuizione, tendono a procedere casualmente, adottando schemi già usati anche se palesemente inadeguati, e di fronte alle prime difficoltà, rinunciano a qualsiasi tentativo di ricerca di una soluzione.

I problemi RMT :

Sviluppano abilità e conoscenze in matematica

Sviluppano le abilità di problem solving

Favoriscono un atteggiamento positivo nei confronti della matematica

Permettono di controllare se i contenuti affrontati sono stati appresi

Grazie!

associazione
Rally
Matematico
Transalpino
Siena