

Primo corso di formazione  
dell'Associazione Rally Matematico Transalpino Siena

**UN PONTE TRA TEORIA E PRATICA:  
QUALE MATEMATICA OGGI IN CLASSE ?**

## *Il concetto di funzione e la sua complessità nei problemi del RMT*

Michel HENRY, ARMT- IREM de  
Besançon, 23/11/2019

### Il concetto di funzione nei problemi del RMT

#### Elementi di problematicità, nodo epistemologico

Il concetto di funzione è uno dei più fondamentali in matematica. Il suo apprendimento concerne tutte le classi della scuola secondaria, e continua poi all'Università.

Gli allievi incontrano ostacoli molto forti, di natura epistemologica e didattica, che si rivelano attraverso numerose resistenze, esitazioni ed errori nella risoluzione dei problemi.

## Il concetto di funzione nei problemi del RMT

Elementi di problematicità, nodo epistemologico

Il termine stesso di *funzione* induce fortemente l'idea di una *relazione causale* tra una grandezza variabile e la grandezza da essa determinata.

Questo ostacolo epistemologico è accompagnato spesso da un ostacolo didattico quando gli allievi nella fase iniziale dell'apprendimento interpretano questo legame come una relazione di proporzionalità.

L'abbandono di questa causalità, progresso determinante nell'apprendimento della matematica, sarà vissuto come "un vero ripensamento intellettuale", secondo il termine di Gaston Bachelard, per passare da un apprendimento ingenuo ad una vera conoscenza scientifica.

## Il concetto di funzione nei problemi del RMT

Idea, nozione, concetto

- In alcuni contesti, c'è l'idea di un legame funzionale tra due quantità che si situa ad un livello implicito, intuitivo, molto personale.
- Occorrerebbe far passare gli allievi da questo apprendimento di un'idea di funzione alla nozione più esplicita come strumento di risoluzione di problemi.
- Il concetto di funzione è più particolarmente legato alla sua definizione matematica e alle proprietà intrinseche delle funzioni (univocità, senso di una variazione, rappresentazioni analitiche e grafiche, continuità, ...) e al vocabolario associato.

## Il concetto di funzione nei problemi del RMT

### Idea di funzione

**Gottfried Wilhelm Leibniz 1646 – 1716**

Rappresentante di razionalismo e deismo  
Inventore del calcolo differenziale e integrale

Crea diverse nuove notazioni tra cui  $y = f(x)$ , introdotta nel 1692 insieme al termine "funzione"



## Il concetto di funzione nei problemi del RMT

### Idea di funzione

**François Viète 1540 – 1603**

Fondatore della nostra moderna algebra  
Separa le variabili dalle incognite:  
consonanti per parametri e vocali per incognite.

La rappresentazione simbolica dell'indeterminata è una grande innovazione: le operazioni agiscono sulle lettere.



## Il concetto di funzione nei problemi del RMT

### Idea di funzione

#### Renato Cartesio (René Descartes)

1596 – 1650, , razionalista e deista  
Cogito ergo sum (quindi penso dunque sono).

Trattato di luce, geometria algebrica, il principio d'inerzia, il Discorso sul metodo...

Inventore della notazione esponenziale  $a^b$



## Il concetto di funzione nei problemi del RMT

### Nozione di funzione

- Occorrerebbe far passare gli allievi da questo apprendimento di un'idea di funzione alla *nozione* più esplicita come strumento di risoluzione di problemi.

#### Leonhard Euler 1707 – 1783

Laplace : *Leggi Eulero, leggi Eulero, è il nostro maestro di tutti*

#### Necessità di una formula:

Per Euler,  $x^2$  è una funzione

Ma  $x \mapsto x$  se  $x > 0$  e  $-x$  se  $x < 0$

non è una funzione.

Lo dimostra  $e^{i\pi} + 1 = 0$ ,

La formula più bella della matematica



## Il concetto di funzione nei problemi del RMT

### Nozione di funzione

**Gaetana Agnesi** 1718 – 1799

è autrice d'un trattato d'analisi algebrica e infinitesimale.

Corrispondeva con Eulero

Pubblicò il suo lavoro più importante, un manuale che spaziava dall'algebra alla geometria proponendo una prima sistemazione delle recenti scoperte del calcolo infinitesimale, uno dei temi più dibattuti e centrali di allora e oggetto della famosa disputa tra Leibniz e Newton.



$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

la curva di Agnesi  
la "versiera di Agnesi"

## Il concetto di funzione nei problemi del RMT

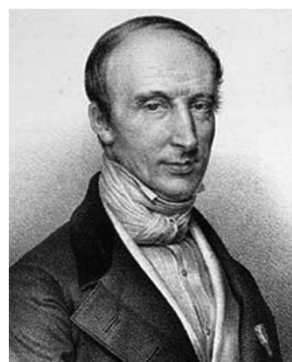
### Concetto

Il *concetto* di funzione è più particolarmente legato alla sua definizione matematica e alle proprietà intrinseche delle funzioni (univocità, senso di una variazione, rappresentazioni analitiche e grafiche, continuità, ...) e al vocabolario associato.

**Augustin-Louis Cauchy**, 1789 – 1857

Corso di analisi dell'École polytechnique nel 1821.

Teoria delle funzioni e dei limiti:  
Studia le proprietà delle funzioni astratte



## Il concetto di funzione nei problemi del RMT

### Concetto

Le funzioni sono oggetti matematici

Definizione astratta: una funzione dell'insieme A nell'insieme B ( $f: A \longrightarrow B; x \longrightarrow y = f(x)$ ) è data da un grafico funzionale in  $A \times B$ , i. e. :

**L'immagine y di una x di A per f è unica**

Le nozioni di funzione e variabile sono indiscutibili

Esercizio impartito a uno studente:

- risolvere la disequazione  $\sqrt{x} < 1$
- Non posso rispondere se non conosco x!

## Il concetto di funzione nei problemi del RMT

La nozione di funzione nei problemi del rally :

- La risoluzione di problemi può contribuire all'acquisizione della nozione di funzione in un processo didattico ?
- In quale misura questa questione è stata finora presa in considerazione e portata avanti nelle analisi a priori ?

Da qui le seguenti domande sul concetto di funzione :

*1 – Alcuni problemi del rally possono essere considerati come una introduzione al concetto di funzione in quanto strumento implicito di risoluzione di problemi ?*

*2 – In quali condizioni didattiche l'utilizzo in classe di questi problemi permette una esplorazione esplicita del concetto di funzione e del vocabolario associato ?*

### Il concetto di funzione nei problemi del RMT

Qualche osservazione:

1) Alcuni problemi possono essere risolti «ad un costo minore» in quadri diversi da quello funzionale : geometrico (costruzioni sperimentali), aritmetico (ragionamento più furbo), logico (analogie, induzioni), numerico (prove, approssimazioni), ecc., cosa che conduce gli allievi a dubitare del suo interesse e a rifiutare di appropriarsene.

2) Quando la funzione soggiacente alla risoluzione del problema può essere tradotta da una formula algebrica molto semplice, una procedura algoritmica può essere intrapresa e può contribuire ad evitare l'ostacolo epistemologico, evitando la generalità cercata nel quadro funzionale. Ci sono allora due livelli di concettualizzazione ben distinti.

### Il concetto di funzione nei problemi del RMT

Qualche osservazione:

3) Alle età considerate (11-15 anni), i contesti dei problemi, spesso limitati agli interi, propongono situazioni discrete in cui il concetto di successione numerica viene naturalmente. Il concetto di funzione opera allora nel caso particolare delle funzioni di una variabile intera (è pertinente ?) e non nel quadro delle funzioni di variabile reale. È una facilitazione didattica che può ostacolare una generalizzazione ulteriore.

### Il concetto di funzione nei problemi del RMT

Qualche osservazione:

- 4) Il concetto di funzione è legato a quello di variabile. Essi sono inseparabili. In quali condizioni la nozione di variabile (intera o reale) può apparire nella risoluzione di un problema come un supporto chiarificatore del pensiero e come uno strumento generatore del calcolo letterale ?
- 5) Quali sono gli elementi di base del vocabolario funzionale (oggetto, immagine, antecedente, vocabolario insiemistico...) che possono essere utilizzati per la risoluzione di un problema ?
- 6) Quale istituzionalizzazione è possibile ?

### Il concetto di funzione nei problemi del RMT

L'utilizzo esplicito della nozione di funzione come strumento di risoluzione di problemi comincia veramente solo a partire dai livelli 9 e 10.

Degli elementi precursori possono figurare nei problemi del rally e condurre gli allievi a utilizzare differenti registri di rappresentazione per risolverli : introduzione di variabili, tabelle di valori, formule letterali, grafici cartesiani... ?

Un primo approccio alla nozione di funzione è la relazione (funzionale) tra oggetto e immagine, come illustra il problema seguente.



## Il concetto di funzione nei problemi del RMT

Il problema seguente (RMT 15-II.10, cat. 5, 6, 7) è costruito a questo scopo, la nozione di funzione è esplicitamente intesa come una relazione oggetto-immagine.

### Calcolatrice speciale

Sofia possiede una calcolatrice molto speciale con un tasto ©.

Quando Sofia preme 5 e ©, la sua calcolatrice mostra : 25

Quando Sofia preme 7 e ©, la sua calcolatrice mostra : 31

Quando Sofia preme 10 e ©, la sua calcolatrice mostra : 40

**Quando Sofia preme 9 e ©, che cosa potrebbe mostrare la sua calcolatrice speciale ?**

**Spiegate come avete trovato la vostra risposta.**

*Analisi del compito : Comprendere che il tasto © fa corrispondere una « immagine » ad ogni numero che « entra » nella macchina.*

## Il concetto di funzione nei problemi del RMT

Un esempio di elaborato di livello 6

Quando Sofia preme 5 e © la calcolatrice mostra 25, ci siamo arrivati facendo varie operazioni e una specie di schema:

① QUANDO SOFIA PREME 5 E ©=20 ESCE IL NUMERO 25;

② QUANDO SOFIA PREME 7 E ©=24 ESCE IL NUMERO 31;

③ QUANDO SOFIA PREME 10 E ©=30 ESCE IL NUMERO 40;

④ QUANDO SOFIA PREME 9 E ©=34 ESCE IL NUMERO 43.

Si può vedere in questo elaborato un grosso ostacolo che si oppone ad un approccio funzionale. Differenti valori numerici sono attribuiti al tasto © secondo gli inserimenti.

I ragazzi si pongono in un quadro additivo per assegnare questo valore a partire dal risultato indicato, in modo tale che l'effetto di questo tasto sia una semplice addizione.

Non si sa perché è assegnato il valore 34 per rispondere alla domanda posta con l'ingresso 9.

### Il concetto di funzione nei problemi del RMT

Abbiamo provato con tanti numeri e alla fine abbiamo trovato (...  $\times 3 + 10$ )  
 La sua calcolatrice potrebbe mostrare quando lascia premere 9 esce 37.

$25 = 5(\times 3 + 10)$   
 $31 = 7(\times 3 + 10)$   
 $40 = 10(\times 3 + 10)$   
 $11 = 9(\times 3 + 10)$

Per esprimere la loro idea di funzione, questi allievi hanno dovuto far intervenire una variabile che hanno annotato :...

La funzione è qui esplicitamente data con una formula di calcolo.  
 Le operazioni presenti negli esempi trattati rivelano il simbolismo adottato dagli allievi per scrivere questa funzione.

### Il concetto di funzione nei problemi del RMT

Spiegazione.

|     |                 |    |   |
|-----|-----------------|----|---|
| +5  | $\times 3 + 10$ | 25 | + |
| +7  | $\times 3 + 10$ | 31 | + |
| +9  | $\times 3 + 10$ | 37 | + |
| +10 | $\times 3 + 10$ | 40 | + |

Abbiamo provato a supporre che nel risultato visto che  $31 - 25 = 6$  e  $7 - 5 = 2$ , abbiamo pensato che  $37 - 25 = 12$  e  $9 - 5 = 4$ , poi visto che  $40 - 31 = 9$  e  $10 - 7 = 3$ . Infine abbiamo provato con varie operazioni che collegassero il numero con il risultato.  
 L'operazione è  $\times 3 + 10$ .

Lo schema mostra chiaramente che la funzione cercata è considerata come un operatore che ad un ingresso fa corrispondere un'immagine, sempre calcolata con  $\times 3 + 10$ .

Ma, nelle loro spiegazioni, gli allievi hanno fatto intervenire i valori dati per questa funzione affine, trovando la proporzionalità, tra le differenze dei dati e quelle delle loro immagini.

### Il concetto di funzione nei problemi del RMT

Lo studio didattico aveva sottolineato questo inganno del quadro affine che permette procedure algoritmiche semplici o di ragionamenti di proporzionalità, che mascherano la pertinenza dello strumento funzione.

L'incontro di altre funzioni, notoriamente di secondo grado, potrebbe ulteriormente far emergere questa problematica?

In più la nozione di variazione deve accompagnare la comprensione della nozione di funzione a livello superiore.

Abbiamo cercato di reperire nei protocolli di quattro problemi del 17esimo RMT gli ostacoli che si presentano ad un allievo quando deve passare da una procedura aritmetica o algoritmica ad una procedura che mette in opera la nozione di funzione con diversi strumenti di rappresentazione.

### Il concetto di funzione nei problemi del RMT

#### Un mazzo di fiori (RMT 17.I.15, cat. 7, 8, 9, 10),

Sandra è rappresentante di classe. Gli allievi apprezzano molto la loro professoressa di matematica e decidono di regalarle un mazzo di fiori per le feste di Natale. Ogni allievo ha versato tante volte 2 centesimi di euro quanti sono gli allievi della classe. Sandra ha raccolto le quote e conta la cifra ottenuta. Senza considerare la sua quota, ha 22 euro e 44 centesimi.

**Quanti allievi ci sono nella classe ?**

Noi avevamo aggiunto la seguente questione, con l'obiettivo di stimolare gli allievi a porsi almeno in un registro algebrico :

« **Scrivete i calcoli da fare per trovare il numero di alunni** ».

Questo problema si « formalizza » con una semplice equazione :  
 $2x^2 - 2x = 2244$ .

### Il concetto di funzione nei problemi del RMT

Un elaborato di cat. 9 scrive quasi bene l'equazione (errore di unità !) senza risolverla (procede per tentativi per trovare la soluzione) :

$$\begin{array}{l} x \cdot (x-1) \\ (x^2 - x) \end{array} \quad 0,2x^2 - 0,2x = 22,44$$

In 3 elaborati di cat. 10 si scrivono delle « formule algebriche », ma sono sbagliate (incomprensione dell'enunciato).

In 2 protocolli su 16, si trova esplicitamente l'idea di funzione.

Per esempio, in cat. 10, a partire da una tabella di valori, gli allievi utilizzano la funzione  $2x^2$  seguita dall'equazione corretta.

- Le procedure di risoluzione si riducono a dei tentativi, sia disordinati, sia un po' organizzati e ragionati.

Per esempio, nessuno dei 32 elaborati di Parma di livello 9 scrive un'equazione, e soltanto 3 su 21 di livello 10.

### Il concetto di funzione nei problemi del RMT

Lo studio di questi protocolli ci aveva suggerito le seguenti questioni :

- In questo problema del mazzo di fiori, alcuni studenti hanno pensato alla radice quadrata come operazione inversa del quadrato. Questo significherebbe la presenza di un'idea di funzione?

- In alcuni vecchi manuali scolastici (fino agli anni '50) i capitoli di algebra (polinomi) precedevano l'introduzione alla nozione di funzione (solo funzioni polinomiali).

L'algebra facilita l'approccio alla nozione di funzione ?

- L'utilizzo di incognite può essere interpretato come un approccio alla variabilità ?

- Per escludere le procedure aritmetiche o algoritmiche discrete e rendere efficace la nozione di funzione, conviene dare dei problemi con delle variabili continue ?

## Il concetto di funzione nei problemi del RMT

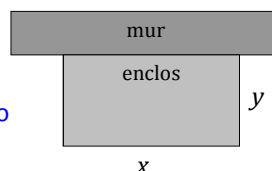
Un problema in contesto geometrico (RMT 18.II.14 e 18.II.19) :

### IL PRATO DI ZIO FRANCESCO

Zio Francesco ha adottato una pecora e vuole riservarle una parte del prato posto a fianco alla sua casa.

Desidera costruire un recinto rettangolare con un lato costituito da un muro che delimita la sua proprietà, come mostra la figura.

Per costruirlo, dispone di una rete di lunghezza  $a = 20$  m che deve formare gli altri lati del rettangolo.



Versione I (cat 7 e 8) : Ma Zio Francesco desidera dedicare alla sua pecora una superficie di erba di  $42 \text{ m}^2$ .

Versione II (cat 9 e 10) : Ma Zio Francesco desidera dedicare alla sua pecora una superficie d'erba di  $40 \text{ m}^2$ .

**Quali lunghezze  $x$  e  $y$  dei lati del rettangolo deve scegliere Zio Francesco per realizzare questa condizione ?**

**Mostrate i calcoli che avete fatto o spiegate come le avete trovate.**

## Il concetto di funzione nei problemi del RMT

Versione I :  $42 \text{ m}^2$

Questa versione con un recinto di  $42 \text{ m}^2$  fornisce delle soluzioni intere :  $14 \text{ m} \times 3 \text{ m}$  e  $6 \text{ m} \times 7 \text{ m}$ . Queste soluzioni possono essere ottenute con qualunque tentativo, tenendo conto della divisibilità.

In pochissimi protocolli (3 su 154 in cat. 7 e 4 su 123 in cat. 8) si trovano delle formule algebriche che, in ogni modo, non sono utilizzate successivamente che per dei tentativi.

In due protocolli di livello 8, compaiono una o due variabili, in forma letterale, (del tipo  $x + 2y$ ) o in forma retorica, con l'intenzione di « farle variare » sostituendole successivamente con differenti valori con la presenza di una tabella.

In tre elaborati, ma che poi non ne fanno nulla, compaiono delle formule algebriche, (come  $x + 2y = 20$  e  $xy = 42$ ). Ma gli alunni non sanno risolvere questo sistema. Segnaliamo questo elaborato di livello 8 :

$$\begin{array}{l} ? \times ? = 42 \\ ? + ? = 20 \\ 42 \div ? = ? = ? \times 2 + ? \\ 42 \div 6 = 7 = 7 \times 2 + 6 \end{array}$$

## Il concetto di funzione nei problemi del RMT

La procedura per tentativi è la più frequente, generalmente a partire dai divisori di 42, accompagnati a volta da una rappresentazione in tabella. Lo strumento « tabella » si rivela utile anche per provare che non esistono altre soluzioni oltre a quelle prodotte.

Queste procedure, anche se non fanno esplicitamente riferimento ad una legge funzionale, contengono una *idea di variabilità*, poiché ad un numero che varia in un insieme se ne associa un altro.

In questo problema, in cui non si dispone degli strumenti algebrici necessari, (equazione di 2° grado) e nel quale l'insieme delle soluzioni possibili è finito e « piccolo », la rappresentazione sotto forma di tabella o qualunque procedura per tentativi organizzati appare la più efficace.

| Longueur | largeur 1 | largeur 2 |   |
|----------|-----------|-----------|---|
| 2        | 9         | 9         | a |
| 4        | 8         | 8         | b |
| 6        | 7         | 7         | c |
| 8        | 6         | 6         | d |
| 10       | 5         | 5         | e |
| 12       | 4         | 4         | f |
| 14       | 3         | 3         | g |
| 16       | 2         | 2         | h |
| 18       | 1         | 1         | i |

resultats correctes.

## Il concetto di funzione nei problemi del RMT

Versione II : 40 m<sup>2</sup>

Nello stesso contesto di quello per la versione I, il recinto da costruire misura 40 m<sup>2</sup> e la domanda posta è : Quali saranno, approssimate al decimetro, le misure dei lati del recinto rettangolare di Zio Francesco ?

Si osserva una debole percentuale di successo ; molti elaborati in bianco, soprattutto in cat.9, e un piccolo progresso in cat.10.

Le difficoltà principali sono state :

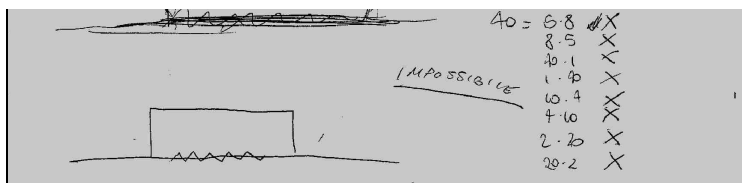
- l'interpretazione della richiesta di una « approssimazione al decimetro » :
- difficoltà nell'organizzare dei tentativi con numeri decimali, cosa che costituisce invece un invito a provare quando ci sono numeri interi.
- difficoltà nel calcolo algebrico (risoluzione dell'equazione di secondo grado) e per giustificare le risposte (né spiegazioni, né calcolo).

- Un protocollo di cat. 10 scrive l'equazione  $20y - 2y^2 = 40$ , che però non è risolta.
- Nessun protocollo mostra l'abbozzo di una soluzione grafica.

## Il concetto di funzione nei problemi del RMT

Dans les copies de deux autres classes, on ne trouve aucune solution graphique.

- Una sola tabella, in cat 9, che contiene solo numeri interi.



| $A_0$ |   |  |
|-------|---|--|
| 6.8   | X |  |
| 8.5   | X |  |
| 10.1  | X |  |
| 1.90  | X |  |
| 10.4  | X |  |
| 4.60  | X |  |
| 2.20  | X |  |
| 20.2  | X |  |

IMPOSSIBILE

- In cat 9, un solo elaborato scrive l'equazione, risolta poi per tentativi

- In cat. 10, 14 elaborati (48%) scrivono l'equazione di cui 2 la risolvono per tentativi e 12 utilizzando la formula che dà le soluzioni.

- La difficoltà di lavorare con numeri decimali rende poco efficace il metodo per tentativi.

- Lo strumento « funzione », e in particolare le sue rappresentazioni sotto forma di tabelle e grafici, non sembra essere utile per la risoluzione del problema.

- Dalla cat. 9 alla cat. 10, si segnala un utilizzo più consapevole delle variabili.

## Il concetto di funzione nei problemi del RMT

La nostra problematizzazione conduce all'ostacolo tipico (nel senso di Gaston Bachelard) quando una conoscenza remota viene a contrapporsi all'assimilazione di una nuova conoscenza in seno ad una rete concettuale solidamente costituita nelle rappresentazioni mentali.

La didattica ha come oggetto sviluppare strategie di insegnamento idonee, come l'utilizzo di altri strumenti piuttosto che una rappresentazione funzionale, ma che comunque introducano una relazione oggetto-immagine.

### Il concetto di funzione nei problemi del RMT

Abbiamo provato in questa sperimentazione a proporre problemi i cui testi incoraggiassero gli allievi a utilizzare lo strumento « funzione » in uno o l'altro dei differenti registri di rappresentazione : grafici, formule algebriche, tabelle...lettura di un grafico cartesiano (incoraggiamento implicito ?)

### Il concetto di funzione nei problemi del RMT

Ma abbiamo visto che per la maggioranza degli allievi, in tutti i casi fino alla cat.9, il grafico sembra apportare difficoltà supplementari, piuttosto che facilitare la risoluzione di problemi.

Abbiamo visto anche la necessità di passare al quadro algebrico per evitare procedure fastidiose con numerosi tentativi, soprattutto quando le soluzioni non sono intere.

Termino questa relazione ponendo due questioni :

- Quale lavoro preparatorio in classe sull'*idea* di funzione può favorire l'acquisizione della *nozione*?
- In quali situazioni il quadro funzionale sarà inevitabile per far funzionare esplicitamente il *concetto* di funzione?



**BIBLIOGRAFIA**

- Bachelard G., 1938, *La formation de l'esprit scientifique*, Vrin, 2000.
- Henry A., Henry, M., Rizza A. Funzioni per risolvere problemi? Comunicazione del gruppo Funzioni, Gazette de Transalpie n°1, 2011.
- Henry, M. & Rizza, A. Six questions sur la notion de fonction dans les problèmes du RMT, *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 8, Brigue 2008. Eds. Lucia Grugnetti & François Jaquet, ARMT, 2009, p. 143-166.
- Jaquet F., 2001, Le traitement d'une fonction, obstacles et représentations, le funzioni, ostacoli e rappresentazioni, in L. Grugnetti, F. Jaquet, C. Crociani, L. Doretti, L. Salomone (eds.), *évolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques*, actes des 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> journées d'études sur le RMT de Sienne et Neuchâtel, ARMT, p. 38- 56.
- Maffini A., 2001, Un'analisi del concetto di funzione nella scuola media superiore, in Anichini G. (ed.), *Nuclei fondanti del sapere matematico nella scuola del 2000* (in ricordo di Francesco Speranza), Atti XXI Convegno Nazionale UMI-CIIM sull'Insegnamento della Matematica: NUMI, suppl. al n.10, ottobre 2001, pp. 150-152.
- Rizza, A. & Henry, M. Idea di funzione, *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 7, Bard (Valle d'Aosta) 2007. Eds. Lucia Grugnetti, François Jaquet, Gianna Bello, Rosanna Fassy, Graziella Telatin, ARMT, 2008, p. 181-198.

**Grazie per la vostra grande pazienza  
e per la vostra attenzione**