Il numero di Sofia

Sofia ha scritto con il gesso un numero di 3 cifre. Suo fratello Leo cancella la cifra delle centinaia e le dice:

"Guarda, adesso il tuo numero è stato diviso per 5".

Quale può essere il numero scritto da Sofia?

Trovate tutte le risposte possibili e spiegate come le avete individuate.

Il numero di Sofia (ral. 20.II.08 ; cat. 5-8 ; 20rmtii_it-8): Trovare un numero di tre cifre tale che eliminando la cifra delle centinaia si ottenga la sua divisione per 5.

Risultati

Categoria	0	1	2	3	4	N. classi	Media
Cat 5	131 (27%)	132 (27%)	110 (22%)	76 (15%)	44 (9%)	493	1.53
Cat 6	198 (23%)	210 (24%)	242 (28%)	145 (17%)	82 (9%)	877	1.66
Cat 7	87 (12%)	119 (16%)	262 (36%)	152 (21%)	110 (15%)	730	2.11
Cat 8	58 (10%)	54 (10%)	171 (30%)	182 (32%)	100 (18%)	565	2.38
Total	474 (18%)	515 (19%)	785 (29%)	555 (21%)	336 (13%)	2665	1.91

… per elencazione dei multipli di 5

drammatizzando, immedesimarsi nella situazione descritta e procedere passo passo

- considerare i multipli di 5 di tre cifre
- rendersi conto che i numeri da considerare sono maggiori di 100 e minori di 500 (il quoziente nella divisione per 5 è di due cifre)
- Procedere in ordine crescente partendo da 100 (o decrescente partendo da 500), dividere per 5 e selezionare i numeri a due cifre che hanno le stesse decine ed unità del numero di partenza

oppure

Considerare i multipli di 5 a due cifre che moltiplicati per 5 diano un numero di tre cifre : 20, 25, 30, 35, … 95 selezionare i numeri a tre cifre che hanno le stesse decine ed unità del numero di partenza.

… con i criteri di divisibilità ed elencazione

"Guarda, adesso il tuo numero è stato diviso per 5"

⬇

✓ Il numero di tre cifre scritto da Sofia è divisibile per 5 e quindi la sua cifra delle unità è 0 o 5

✓ Il numero di due cifre rimasto dopo la cancellazione della cifra delle centinaia è divisibile per 5 perché termina per 0 o per 5

Il numero di Sofia è divisibile per 25

elencare i multipli di 25 di tre cifre maggiori di 100 e minori di 500

100	125	150	175
200	225	250	275
300	325	350	375
400	425	450	475

dividerli per 5

20	25	30	35
40	45	50	55
60	65	70	75
80	85	90	95

oppure,

Essendo il numero di Sofia multiplo di 25, è del tipo 25 *n*

Si deve determinare n

il numero è stato diviso in 5 parti

Il quoziente, ovvero ciò che rimane, ne è la quinta parte

il numero n delle parti è un multiplo di 5

si può ragionare schematizzando la situazione per centinaia

- Se la cifra delle centinaia eliminata è 1, si ottiene il numero diminuito di 100 cioè 4 volte 25, ciò che rimane è una volta 25. Il numero di Sofia è quindi 125

(*n* è 5 volte 25)

- Se la cifra delle centinaia eliminata è 2 , si ottiene il numero diminuito di 200 cioè 8 volte 25, ciò che rimane è due volte 25. Il numero di Sofia è quindi 250

(*n* è 10 volte 25)

- Se la cifra delle centinaia eliminata è 3 , si ottiene il numero diminuito di 300 cioè 12 volte 25, ciò che rimane è tre volte 25. Il numero di Sofia è quindi 375

(*n* è 15 volte 25)

oppure, *direttamente nel testo si dice*

Il numero di Sofia è di 3 cifre

eliminare la cifra delle centinaia equivale a dividerlo per 5

↓

ciò che rimane dopo la divisione è il quoziente

Il quoziente è $\frac{1}{5}$ *del numero di Sofia*

… con le frazioni

Le centinaia eliminate rappresentano i $\frac{4}{5}$ *del numero di Sofia*

Se la cifra delle centinaia è 1, 100 rappresenta i 4/5 del numero di Sofia, quindi 1/5 è 25 (=100:4) e *il numero di Sofia* è 125

Se la cifra delle centinaia è 2, 200 rappresenta i 4/5 del numero di Sofia, quindi 1/5 è 50 (=200:4) e *il numero di Sofia* è 250

Se la cifra delle centinaia è 3, 300 rappresenta i 4/5 del numero di Sofia, quindi 1/5 è 75 (=300:4) e *il numero di Sofia* è 375

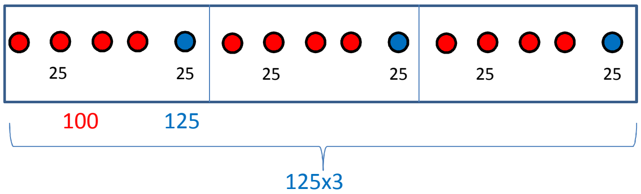
In molti hanno osservato che:

una volta individuato il primo numero **125**, gli altri si ottengono moltiplicando quest'ultimo per due o per tre

250 = 125×2 **375** = 125×3

ma non hanno saputo spiegarne il motivo

Non è un caso!



*lo possiamo dimostrare **anche** per via algebrica!*

Scomponiamo il generico numero di tre cifre abc in centinaia ed unità :

abc = a×100 + bc

Dall'informazione che il numero originale è cinque volte quello rimasto dopo la cancellazione si ottiene la seguente traduzione algebrica del problema :

abc = 100a+bc=5(bc) ovvero 100a=4bc

Si ottiene un'equazione lineare in due incognite (a e bc) della quale ci interessano solo le soluzioni intere

$100a=4bc \quad \rightarrow \quad \mathrm{bc} = \frac{5^2 \cdot 2^2 \cdot \mathrm{a}}{2^2} \quad \rightarrow \quad 5^2 \cdot \mathrm{a} < 100$

$\Downarrow$

$\mathrm{a} = \mathbf{1}$ o $\mathrm{a} = \mathbf{2}$ o $\mathrm{a} = \mathbf{3}$

abc =***125*** o *abc* = ***250*** (*125*×2) o *abc*= **375** (*125*×3)

Qualche riflessione con i più grandi

E se ….

cancelliamo la cifra delle centinaia di un numero a tre cifre, per quali numeri interi n possiamo dire

Guarda, adesso il tuo numero è stato diviso per n?

La seguente tabella indica sia i valori *n* per i quali ci sono soluzioni, sia il loro numero

n.	3	5	6	7	9	11	13	16	19	21	25	26	29	31	33	36	37	46	51	61	71	81	91
Sol.	1	3	4	1	3	9	3	3	1	8	1	7	1	3	1	1	1	1	9	2	1	1	1

… algebricamente

100a+bc=n(bc)   ovvero   100a=(n-1)bc

… con le frazioni

n-1 deve essere un divisore di 100a con 1≤*a* ≤9

(il numero di Sofia S è tale che S – 100a=S:n e quindi 100a rappresenta gli (n-1)/n di S)

E se ….

cancelliamo la cifra delle unità di un numero a tre cifre, per quali numeri interi n possiamo dire

Guarda, adesso il tuo numero è stato diviso per n?

C'è un unico valore di n, ***n=10*** *per il quale si hanno 90 soluzioni*

E se ….

cancelliamo la cifra delle decine di un numero a tre cifre, per quali numeri interi n possiamo dire

La tabella riassume sia i numeri *n che il numero di soluzioni* per ciascun *n*

n	**6**	**7**	**9**	**10**	**11**	**13**	**16**
n° sol.	1	1	4	9	45	1	1

Qualche riflessione con i più piccoli

Il problema mette in gioco conoscenze relative al valore posizionale delle cifre nella scrittura di un numero associandole alle operazioni di addizione e moltiplicazione, ai criteri di divisibilità ma anche

all'osservazione di regolarità numeriche

per le classi di cat.5 e 6, nel proporre la struttura posizionale dei numeri

- cercare di evitare visualizzazioni standard che rischiano di fossilizzare il modo di comporre o scomporre un numero (esempio il numero 127 ha 12 decine e 7 unità oppure … e non fermarsi ad 1 centinaio, 2 decine e 7 unità)
- utilizzare il valore posizionale per facilitare e velocizzare il calcolo (*scoperta e utilizzo delle proprietà delle operazioni*)

- sviluppare negli allievi
  - ✓ il gusto della ricerca
  - ✓ la scoperta di regolarità
  - ✓ la capacità di organizzare una ricerca progressivamente più sistematica
  - ✓ la ricerca di eventuali più soluzioni ugualmente possibili
  - ✓ la scoperta di strategie risolutive diverse, tutte ugualmente buone ma ciascuna con la propria peculiarità
  - ✓ la capacità di generalizzare

Esempi di problemi del RMT per stimolare, in questo senso, sia gli allievi di categorie 3, 4, 5 sia quelli di categorie più alte anche fino alla 10

L'abaco (**ral. 19.F.06; cat. 4-5) :**Trovare il più piccolo numero che si possa rappresentare su un abaco utilizzando 24 palline

Numero sconosciuto (**ral. 12.I.03 ; cat. 3-4 ; 12rmti_it-3**): Trovare il numero naturale di due cifre nel quale la somma delle cifre sia 11 e che diminuisca di 45 quando le due cifre vengono scambiate di posto.

Candeline (**ral. 11.F.07 ;cat. 5-6 ; 11rmtf_it-7): **Sapendo che quest'anno l'età di due persone si scrive con le stesse due cifre in ordine inverso e che una delle due persone ha 85 anni, trovare tutte le possibili loro età in cui questo è successo o può ancora succedere.

La gita in automobile (**ral. 07.F.11 ; cat. 5-7 ; 07rmtf_it-11**): Trovare due numeri di due cifre permutate tra loro, poi un terzo numero che si scriva con le stesse due cifre separate da uno “0”, sapendo che la differenza tra il primo e il secondo numero è uguale alla differenza tra il secondo e il terzo.

Compleanni e candeline (**ral. 16.F.14 ; cat. 7-10 ; 16rmtf_it-14**) **:** (d86-it) In un contesto di candeline su una torta di compleanno, determinare, se esistono, due numeri formati dalle stesse due cifre e tali che la differenza tra loro sia in un primo caso 36 e poi 30

Il vecchio contachilometri (I) (**ral. 11.I.02 ; cat. 3-4 ; 11rmti_it-2**): Calcolare quante volte ”cambiano le cifre” delle unità , delle decine e delle centinaia in un contachilometri a partire da 000 a 127.

Il vecchio contachilometri (**ral. 11.I.09 ; cat. 5-6 ; 11rmti_it-9**): Determinare una distanza percorsa conoscendo il numero di volte (140) che il contachilometri ha cambiato il suo display (la sua visualizzazione)

Numeri che non bastano (**ral. 12.I.04 ; cat. 3-5 ; 12rmti_it-4**): Avendo a disposizione 25 cartellini di ogni cifra da« 0 » à « 9 », determinare quante cifre « 1 » mancheranno per formare tutti i numeri naturali da 1 a 116.

Scatole di gessi I (**ral. 26.II.08 ; cat. 5-8 ; 26rmtii_it-8**):
Cercare tutti i numeri inferiori a 200 nei quali il numero delle decine è il doppio del numero indicato dalla cifra che rappresenta le unità

Scatole di gessi II (**ral. 26.II.16 ; cat. 9-10 ; 26rmtii_it-16**): Cercare un numero n tale che, se diviso per il numero totale delle sue decine, il resto della divisione corrisponda alla metà del divisore.

Pennarelli nuovi **(ral. 21.II.12 ; cat. 6-8 ; 21rmtii_it-12)**: In un contesto di scatole di pennarelli, trovare il numero in base 10, che corrisponde esattamente a 85 raggruppamenti completi di primo, secondo e terzo ordine organizzati in base otto.

Via della republica **(ral. 23.II.15 ; cat. 7-10 ; 23rmtii_it-15)**: Determinare due numeri differenti di due cifre sapendo che la cifra delle decine dell'uno è la cifra delle unità dell'altro e viceversa, che la loro differenza è 18, la loro somma è multiplo di 6 e il loro prodotto è multiplo di 8.

Strana moltiplicazione **(ral. 17.I.14 ; cat. 7-9 ; 17rmti_it-14)**: Individuare il fattore mancante di una moltiplicazione sapendo che è stato commesso un errore nell'applicazione dell'algoritmo e conoscendo la differenza fra il prodotto sbagliato e quello giusto.