



**Un ponte tra teoria e pratica:
quale Matematica oggi in classe?**

**Il progetto ArAl:
nuovi intrecci fra aritmetica e algebra.
Una didattica per problemi
nella prospettiva dell'early algebra**

Giancarlo Navarra
GREM, già Università di Modena e Reggio Emilia

Siena - 22-24 novembre 2019 - Primo Corso di Formazione ARMT



Nicolina A. Malara, responsabile scientifica
Giancarlo Navarra, co-responsabile scientifico
coordinatore nazionale

GREM, Nucleo di ricerca in Educazione matematica
Università di Modena e Reggio Emilia (1983-2015)

Dal 2001: collaborazioni con istituti e corsi di formazione

Rosa Iaderosa, Antonella Giacomini, Francesca Ricci,
Maria Piccione, Elena Marangoni, coordinatrici e docenti
di istituti ArAl

www.progettoaral.it

FB: gruppo Progetto ArAl

G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

2

Cos'è l'early algebra Quando nasce

G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

3

L'early algebra: tappe di una catena evolutiva

Kieran, C.: 1989, 'The early learning of algebra: A structural perspective', in S. Wagner and C.Kieran (eds), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics, Virginia, pp. 33-56.

Meira, L.: 1996, 'Students' early algebraic activity: Sense making and the production of meanings in mathematics', in L. Puig and A. Gutiérrez (eds), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

G. Navarra, Webinar 1 - Early Algebra: un approccio innovativo per la didattica dell'aritmetica e dell'algebra - 16-17 maggio 2019

4

L'early algebra: tappe di una catena evolutiva

2000, Melbourne, Convegno ICMI-Studies.
Per la prima volta una sessione dedicata esplicitamente all'Early Algebra.

Kieran, C.: 2004, 'Algebraic thinking in the early learning of algebra: what is it?', *The Mathematics Educator*, Vol.8, No 1, pp. 139-151.

L'early algebra: tappe di una catena evolutiva

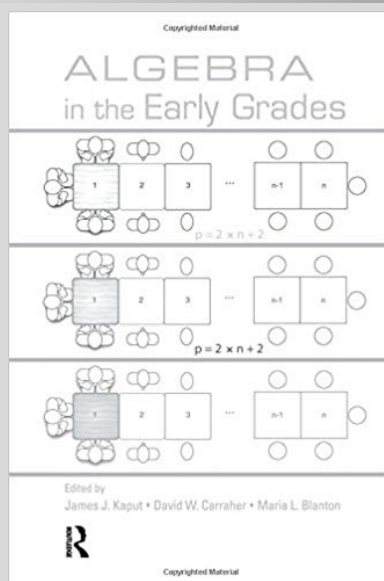
2001: Il Progetto ArAl si qualifica al primo posto nel concorso nazionale SeT

2003: Inizia la Collana Progetto ArAl



L'early algebra: tappe di una catena evolutiva

2007

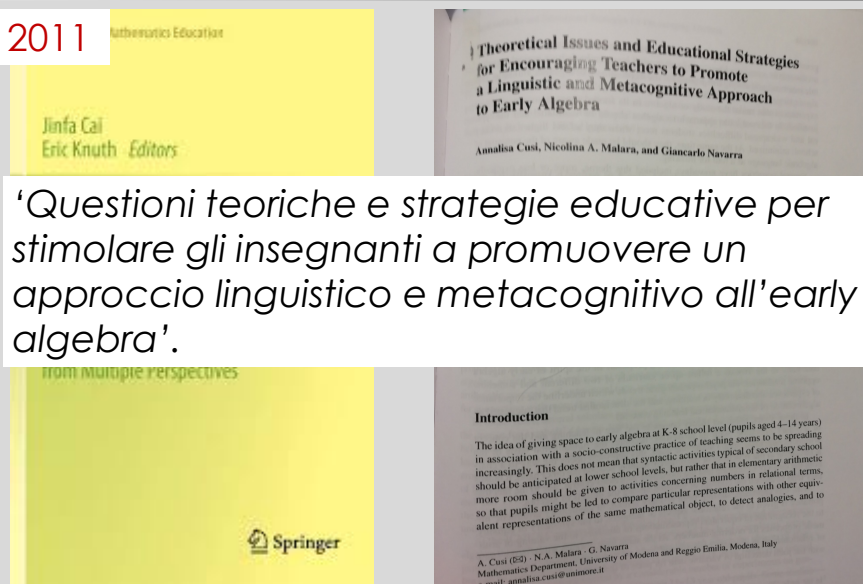


G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

7

L'early algebra: tappe di una catena evolutiva

2011



G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

8

L'early algebra: tappe di una catena evolutiva


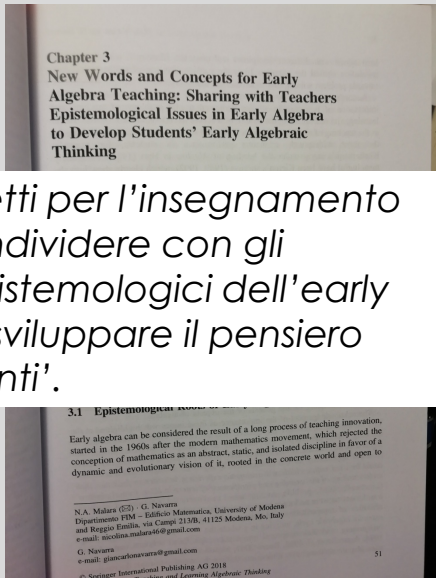
2016



G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT 9

L'early algebra: tappe di una catena evolutiva

2018

'Nuovi termini e concetti per l'insegnamento dell'early algebra: condividere con gli insegnanti i principi epistemologici dell'early algebra allo scopo di sviluppare il pensiero relazionale negli studenti'.

G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT 10

Cosa si intende con 'Early Algebra'

Non tanto:

“Approccio *precoce* all'algebra”,

“Approccio *anticipato* all'algebra”,

quanto:

“Algebra degli inizi”,

“La prima algebra”.

Quindi:

Non iniziare prima l'algebra ma scoprire il volto algebrico di ciò che viene,

normalmente, visto 'solo' come

aritmetica. (v. Kieran & al., 2016)

Early Algebra e Progetto ArAl

David Carragher (Carragher & altri, 2007), titola significativamente un capitolo del suo libro *Algebra in the early grades*:

Early Algebra
Is Not the Same
as Algebra Early.

Vediamo il quadro che il Progetto ArAl ha sviluppato, in parte in modo originale, in questa prospettiva.

Quale Matematica oggi in classe

Le radici dell'albero

Aritmetica del 'far di conto'

Operazione

$3+5=8$


Risultato

Sono ontologicamente **diverse**

L'**uguale** è un operatore **direzionale**

Ha un significato **spazio-temporale**

È l'indicatore che 3 più 5 **fa** 8

G. Navarra, Villacidro (SU) - 16-17 maggio 2019 13

Le radici dell'albero

Aritmetica del 'far di conto'

Operazione

$3+5=8$


Risultato

Sono ontologicamente **diverse**

$8=3+5$ **non va bene**.

È 'scritta al contrario'.

Attorno al pensiero degli alunni viene costruita una '**gabbia procedurale**'.

G. Navarra, Villacidro (SU) - 16-17 maggio 2019 14

Episodio 1: Seconda primaria

I: E se scrivessi $12=7+5$ è giusta l'operazione?

B: No.

I: Perché?

B: Perché prima si fa il più.

B: È al contrario.

B: Prima va $7+5$ poi il 12.

I: Invece bimbi è giusta: il 12 è il numero della somma tra 5 e 7 in entrambi i casi.

Episodio 2: Seconda primaria

L'insegnante chiede a Rita di scrivere 36 meno 24.

L'alunna scrive:

$$36-24=$$

Si interrompe e chiede "Devo trovare quanto fa?"

L'insegnante la guarda senza rispondere.

Rita aggiunge il risultato dopo l'uguale:

$$36-24=12.$$

Commento agli episodi

La classe non accetta $12=7+5$ perché non capisce come sia possibile il **risultato a sinistra** e l'**operazione a destra**. È abituata ad **operare** sulle scritture matematiche, non ad **interpretarle**. L'uguale possiede un **significato procedurale**, prepara il finale di una storia che inizia **a sinistra** con una o più **operazioni** e si conclude **a destra** con un **risultato**. L'insegnante sottovaluta questo nodo.

G. Navarra, Villacidro (SU) - 16-17 maggio 2019

17

Commento agli episodi

Rita esprime un disorientamento analogo: $36-24$ per lei è un'**operazione**, cioè una scrittura 'in attesa'. Incompleta. Inserisce il simbolo '=' per preparare il **risultato**, perché la scrittura $36-24$, da sola, non ha una 'dignità ontologica', è qualcosa di **provvisorio** (Rita sa che, prima o poi, le verrà chiesto 'quanto fa'). Dei ricercatori l'hanno chiamata **sindrome da mancanza di risultato**.

G. Navarra, Villacidro (SU) - 16-17 maggio 2019

18

Una storia senza finale

Rita esprime un disorientamento analogo a quello di un'opera in attesa di un risultato. Inserisci solo, non qualcosa prima (per, se, non, e, quanto fa'). Dei ricercatori l'hanno chiamata **sindrome da mancanza di risultato**.



G. Navarra, Villacidro (SU) - 16-17 maggio 2019

19

La chioma dell'albero

In algebra

$$15+2x=6x-21$$



L'uguale ha un significato **a-spaziale** e **a-temporale**

Simmetria dell'uguaglianza

È un'uguaglianza fra **rappresentazioni dello stesso numero**

L'uguale ha un significato **relazionale**

G. Navarra, Villacidro (SU) - 16-17 maggio 2019


20

Le radici dell'albero

Rappresentazioni di un numero

Uguaglianze
fra rappresentazioni dello stesso numero

$3+5=8$ $8=3+5$



Operazione $3+5=8$ Risultato

Ontologicamente **diverse**

G. Navarra, Villacidro (SU) - 16-17 maggio 2019 21

Rappresentazioni di un alunno

Nome

Chiara

Descrizioni di Chiara

Figlia di Bruna
Sorella di Simone
Abitante in via...
Amica del cuore di...
Padrona di Poldo
Compagna di banco
Nipote di...
Bambina con fiocco
...

Rozzano - 17 gennaio 2019 22

Rappresentazioni di un numero

Forma canonica di 12

Prodotto

Opaco

Forme non canoniche di 12

Processo

Trasparente

Opaco **Trasparente**



12

6 · 2

1 · 12

2 · 6

3 · 1 · 4

Rozzano - 17 gennaio 2019 23

Rappresentazioni di un numero

Un numero può essere espresso in **infiniti modi**.

Ognuno ha un senso in relazione al contesto e al **processo** sottostante.

12

6+6

15+0-3

24:2

3×1×4

36/3

2²×3

√144

...

[(11+7):9]²×3

Rozzano - 17 gennaio 2019 24

Rappresentazioni di un numero

L'uguale acquista il significato **relazionale** di indicatore di equivalenza fra due quantità, ad es:

$$36/3 = [(11+7):9]^2 \times 3$$

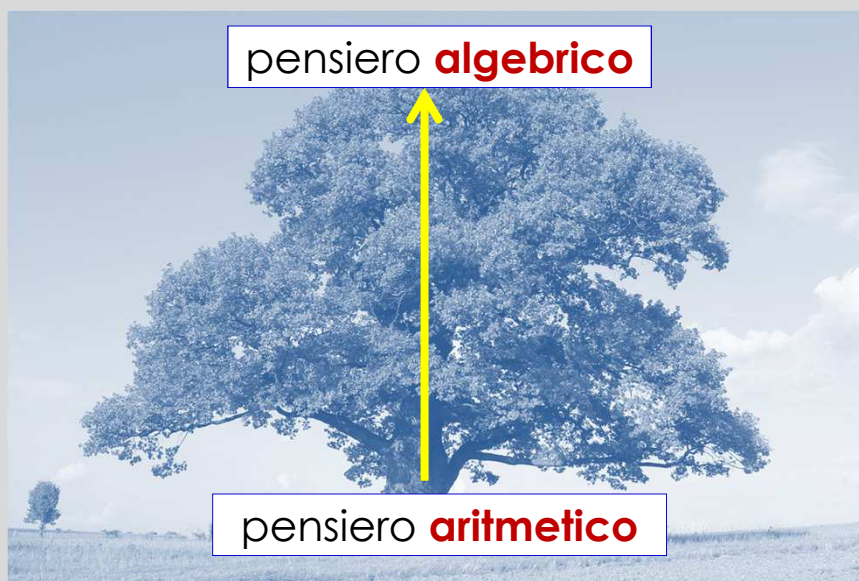
12
 $6+6$
 $15+0-3$
 $24:2$
 $3 \times 1 \times 4$
 $36/3$
 $2^2 \times 3$
 $\sqrt{144}$

Uguaglianza
 fra rappresentazioni dello stesso numero

Rozzano - 17 gennaio 2019

25

Un ponte tra teoria e pratica: quale matematica in classe?



Rozzano - 17 gennaio 2019

26

Un ponte tra teoria e pratica: quale matematica in classe?

pensiero **algebrico**

Sviluppare il pensiero **relazionale**
Non limitarsi al pensiero **procedurale**

Favorire gli aspetti **linguistici**:
Interpretazione, argomentazione

Promuovere la **riflessione** sui **significati**
rispetto alle competenze legate al **fare**

pensiero **aritmetico** pensiero **algebrico**

Rozzano - 17 gennaio 2019 27

Un ponte tra teoria e pratica: quale matematica in classe?

pensiero **algebrico**

Promuovere una didattica **metacognitiva**

Promuovere la **riflessione** sui **significati**
rispetto alle competenze legate al **fare**

pensiero **aritmetico**

Rozzano - 17 gennaio 2019 28

Un ponte tra teoria e pratica: quale matematica in classe?

pensiero **algebrico**

La **semantica** precede la **sintassi**

Favorire gli aspetti **linguistici**:
Interpretazione, argomentazione

Una vecchia porta la sbarra

La brezza gonfia le tende

pensiero **aritmetico**

Rozzano - 17 gennaio 2019 29

Un ponte tra teoria e pratica: quale matematica in classe?

pensiero **algebrico**

Sviluppare il pensiero **relazionale**
Non limitarsi al pensiero **procedurale**

Cos'è $[(11+7):9]^2 \times 3$?

pensiero **aritmetico**

Rozzano - 17 gennaio 2019 30

L'oggetto matematico

$[(11+7):9]^2 \times 3$

Ogni scrittura può essere vista in due modi:

Punto di vista **procedurale**
Eeguire ordinatamente operazioni
Si privilegia l'aspetto **cognitivo**

$11+7$ $18:9$ 2^2 4×3 12	Faccio 11 più 7, poi divido 18 per 9, poi elevo 2 al quadrato, poi moltiplico 4 per 3, trovo il risultato.
---	--

G. Navarra, Villacidro (SU) - 16-17 maggio 2019 31

L'oggetto matematico

$[(11+7):9]^2 \times 3$

Ogni scrittura può essere vista in due modi:

Punto di vista **relazionale**
Interpretare la struttura di una frase
Si favorisce il livello **metacognitivo**

$11+7$ $(11+7):9$ $[(11+7):9]^2$ $[(11+7):9]^2 \times 3$	è una somma è un quoziente è il quadrato di un quoziente è un prodotto
---	---

G. Navarra, Villacidro (SU) - 16-17 maggio 2019 32

L'oggetto matematico

$$[(11+7):9]^2 \times 3$$

Ogni scrittura può essere vista in due modi:

Punto di vista **relazionale**

Interpretare **la struttura** di una frase

Si favorisce il livello **metacognitivo**

- Il **quadrato** di un **quoziente** moltiplicato per 3;
- Il **prodotto** fra un quadrato e 3;
- Il **triplo** del quadrato di un quoziente;
- un **multiplo** di 3...

G. Navarra, Villacidro (SU) - 16-17 maggio 2019

33

Nominare un oggetto matematico

Cos'è un oggetto matematico

$(a+b)^2$ ↔ quadrato di un binomio
 a^3-b^3 differenza di due cubi
 $(3-b^3)(5a+4b)$ prodotto di due binomi

Uno studente che sia stato abituato solo

Lo studente impara, anche, che $(a+b)^2$ è il quadrato di un binomio e sa pure ripeterlo, se l'insegnante gli chiede come si chiama. Ma da qui a parlare di **competenza** ci corre. Un altro episodio.

G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 - Primo Corso di Formazione ARMT

34

Traduzione fra linguaggi

Traduci in linguaggio matematico:

(d) Scrivi il successivo di r → $r+r$

Le ragioni di questa difficoltà sono **nodali**.
Gli studenti sono abituati alla logica del **fare**.

Sono molto meno educati a **riflettere sul significato delle scritte**, siano esse in linguaggio naturale che matematico. Non sono quindi abituati a concepire due frasi come **traduzioni** l'una dell'altra.

Semantica, Sintassi, Parafrasi

Traduci in linguaggio matematico:

(d) Scrivi il successivo di r → $r+r$

Per fare questo, dovrebbero essere guidati, sin dalla prima primaria, a vedere nella matematica un **nuovo linguaggio**, dotato – come qualsiasi linguaggio - di una **semantica** e una **sintassi**.

Un linguaggio per **comunicare**, e attraverso il quale costruire e interpretare frasi, e produrre **parafrasi** sia in linguaggio naturale che matematico.

Semantica, Sintassi, Parafrasi

Traduci in linguaggio matematico:

(d) Scrivi il **successivo di r** → **r+r**

Le **parafrasi** nel linguaggio naturale sono **mediatori** verso la loro **traduzione** in linguaggio matematico (e viceversa).

Per esempio, in questo caso: 'successivo'.
Gli studenti lo definiscono così:

- "Che viene dopo";
- "Più grande di un'unità".
- "Per esempio dopo 24 c'è 25".

Dalle parafrasi alla traduzione in linguaggio matematico

Traduci in linguaggio matematico:

(d) Scrivi il **successivo di r** → **r+r**

Vanno guidati a formulare parafrasi **complete** (soggetto, predicato, complemento).

- 'Il **successivo di un numero** è il numero che viene dopo';
- 'Il **successivo di un numero** è il numero più grande di una unità'.

La seconda parafrasi avvicina alla **traduzione** in linguaggio matematico.

Dalle parafrasi alla traduzione in linguaggio matematico

Traduci in linguaggio matematico:

(d) Scrivi il **successivo di r** → **r+r**

Un ulteriore affinamento:

Il successivo di un numero
è il **numero stesso** più **un'unità**



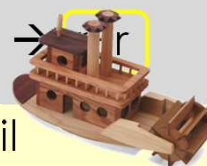
Il successivo di 24 è esprimibile
in forma **non canonica** come

$$\begin{array}{ccc} 24+1 & & 25 \\ \downarrow & & \downarrow \\ r+1 & \leftarrow & ? \end{array}$$

Dalle parafrasi alla traduzione in linguaggio matematico

Traduci in linguaggio matematico:

(d) Scrivi il **successivo di r** → **r+r**

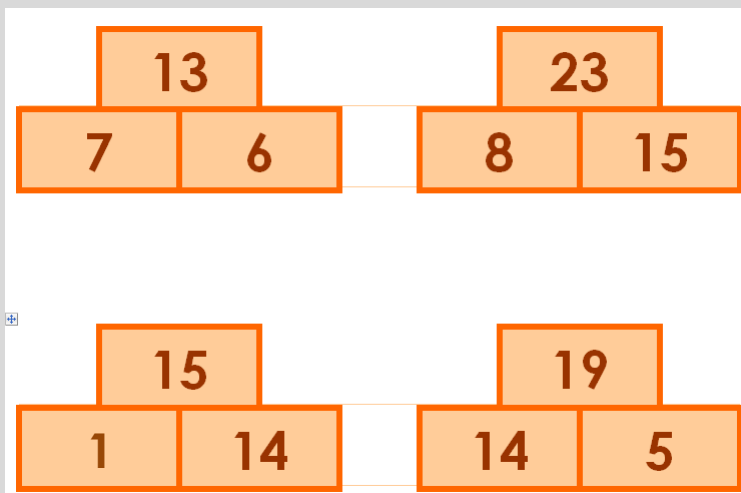


Il linguaggio **naturale** costituisce il
'**traghetto semantico**', sin dalla prima
primaria, verso la costruzione graduale
della capacità di **attribuire significati** ad
una **rappresentazione in linguaggio
matematico**.

→ **Didattica per problemi**

Un primo esempio

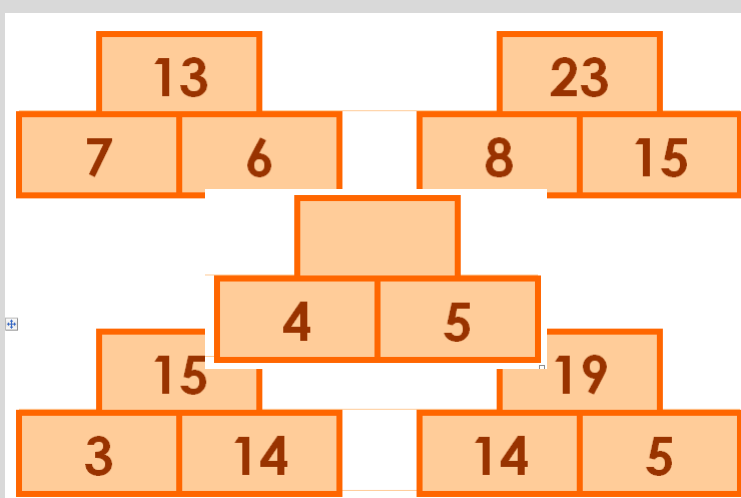
Il linguaggio naturale come traghetto semantico



G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

41

Il linguaggio naturale come traghetto semantico



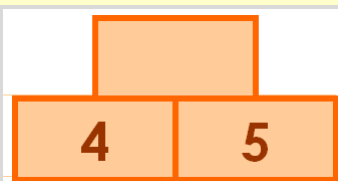
G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

42

I problemi: risolvere vs rappresentare

Regola per un compagno di un'altra classe:
 "Devi addizionare i numeri che stanno sotto
 così verrà il numero che sta sopra".

Definizione **procedurale**



I problemi: risolvere vs rappresentare

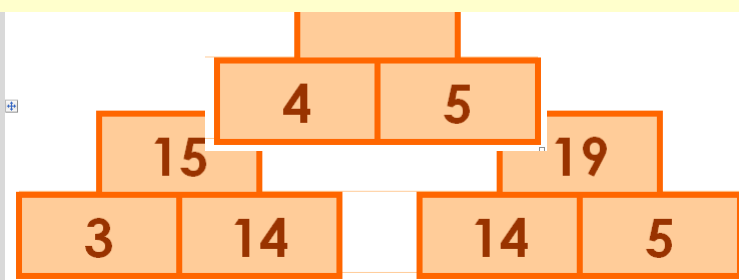
Cos'è il numero in alto?

Il numero in alto è...

... *il risultato* dei due numeri in basso".

... *l'addizione* dei numeri in basso".

... *la somma* dei numeri in basso".



I problemi: risolvere vs rappresentare

“Il numero nel mattone in alto **è la somma** dei due numeri nei mattoni in basso”.

Rappresentare la somma

Forma **canonica** Forma non **canonica**

Verso la generalizzazione

G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT 45

Rappresentare vs risolvere

Spiega come trovi il numero in alto.

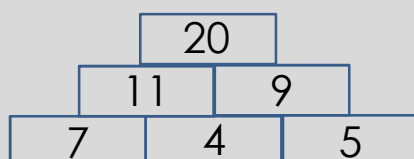
↓

Definizione **procedurale**

Per trovare il numero in alto sommo 7 e 4 e fa 11, poi sommo 4 e 5 e fa 9 e poi sommo 11 e 9 e fa 20.

G. Navarra, Incontri con la Matematica 30, Castel S.Pietro (BO), 4-5-6 novembre 2016 46

Rappresentare vs risolvere



Spiega come trovi il numero in alto.

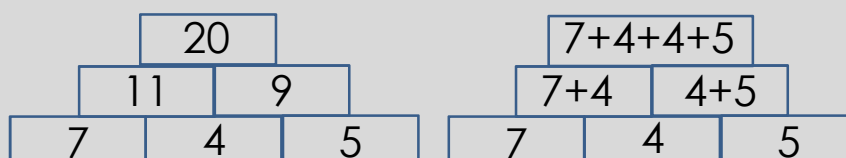


Definizione **procedurale**

Per trovare il numero in alto si sommano 7 e 4 e si scrive 11, poi 4 e 5 si scrive 9 e infine 11 e 9 e si scrive in alto 20.

G. Navarra, Incontri con la Matematica 30, Castel S.Pietro (BO), 4-5-6 novembre 2016 47

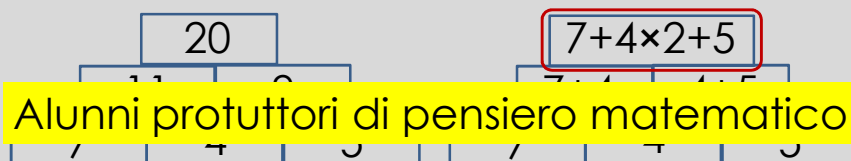
Rappresentare vs risolvere



Cos'è il numero in alto?

G. Navarra, Incontri con la Matematica 30, Castel S.Pietro (BO), 4-5-6 novembre 2016 48

Rappresentare vs risolvere



Cos'è il numero in alto?

La rappresentazione **non canonica** è il traghetto semantico verso la generalizzazione.



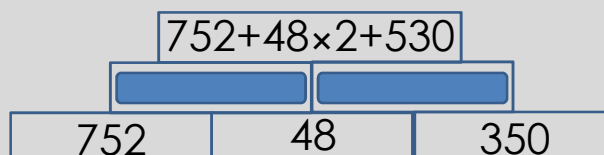
Definizione **relazionale**

Il numero in alto **è** la somma fra il numero a sin., il doppio di quello centr. e quello a des.

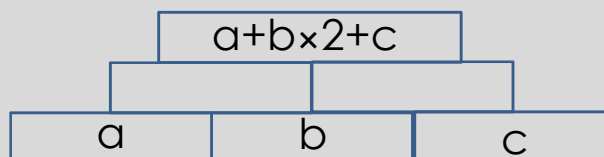
G. Navarra, Incontri con la Matematica 30, Castel S.Pietro (BO), 4-5-6 novembre 2016

49

Rappresentare vs risolvere



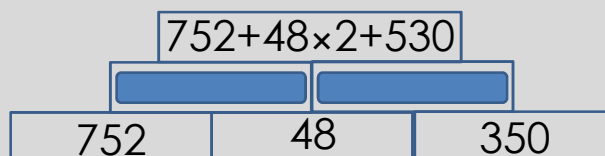
La definizione **relazionale** contiene un **generale potenziale** attraverso il quale gli alunni possono conquistare una nuova **rappresentazione**:



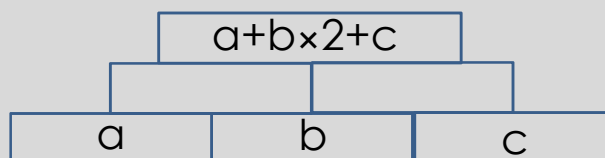
G. Navarra, Incontri con la Matematica 30, Castel S.Pietro (BO), 4-5-6 novembre 2016

50

Rappresentare vs risolvere



Il concetto di **generale potenziale** si pone come ponte fra l'aritmetica e la notazione algebrica con alunni fra i 6 e i 14 anni. Quasi-variabile (Fuji & Stephens 2001) e quasi-generalizzazione (Cooper & Warren, 2011).



G. Navarra, Incontri con la Matematica 30, Castel S.Pietro (BO), 4-5-6 novembre 2016

51

Rappresentare vs risolvere

'Quale Matematica oggi in classe'

Una didattica dell'aritmetica può maturare in una prospettiva algebrica solo se l'insegnante, con gradualità e convinzione, favorisce lo spostamento dell'attenzione dal **risolvere** una situazione problematica (cercare operazioni, trovare risultati) al **rappresentarla** (individuare e interpretare relazioni fra enti anche sconosciuti) allontanando gli alunni dalla **'frenesia del calcolo'** → **Balbettio Algebrico, Brioshi**

G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

52

Due costrutti chiave

Balbettio algebrico

Brioshi

Una didattica per problemi

Sin dalla prima primaria gli alunni introdotti all'early algebra incontrano, attraverso una grande varietà di situazioni problematiche, costrutti chiave come:

- la dualità **processo / prodotto**,
- la dualità **rappresentare / risolvere**,
- la dualità **relazionale / procedurale**,
- le metafore dell'**incognita**
(**pseudoequazione** o **equazione ibrida**),
- ...

Balbettio algebrico

Pseudoequazione o equazione ibrida

J. T. Da Rocha Falcão (1992) indica così i modi nei quali alunni di 6–10 anni non ancora introdotti all'algebra risolvono dei problemi algebrici grazie alle suggestioni indotte da preventive rappresentazioni spontanee o – più frequentemente – opportunamente stimolate dall'insegnante, nelle quali coesistono linguaggio naturale, linguaggio iconico e operatori formali matematici.

G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

55

Balbettio algebrico

Naturalmente le pseudoequazioni non sono manipolate dagli alunni in modo algebrico, perché l'obiettivo non è la soluzione formale di un'equazione ma la conquista del concetto di **rappresentare: si oggettiva la struttura del problema.**

Le pseudoequazioni sono il risultato di un'impostazione metodologica che guida prima a **rappresentare** il problema, in un secondo momento a **risolverlo**.

G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

56

Le equazioni per gioco

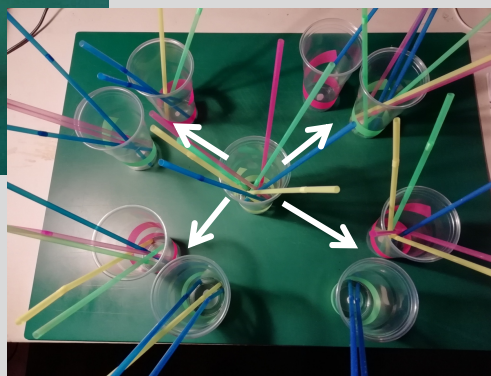
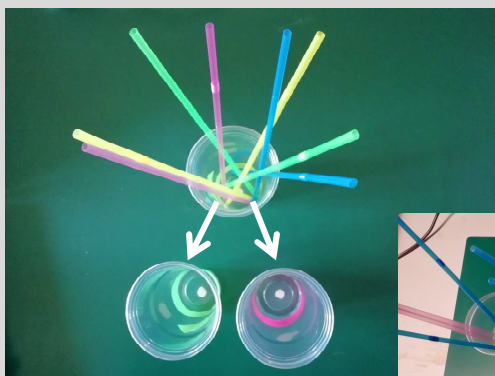
Le pseudoequazioni sono collocabili, anche in alunni di 6-7 anni, nella zona di sviluppo prossimale in cui, relativamente alla **rappresentazione algebrica**, le indicazioni e i suggerimenti provenienti dall'insegnante giocano un ruolo importante nell'attribuzione di senso all'algebra e nell'individuazione di strategie di soluzione di problemi.

Le chiamiamo **equazioni per gioco**.

G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

57

Verso le equazioni per gioco (prima primaria, aprile)



G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

58

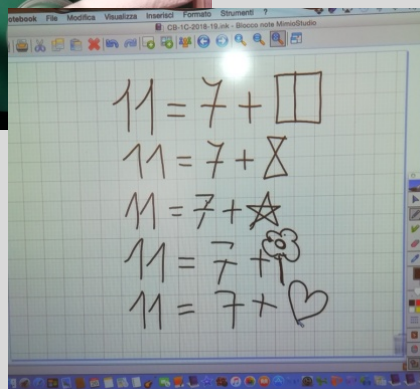
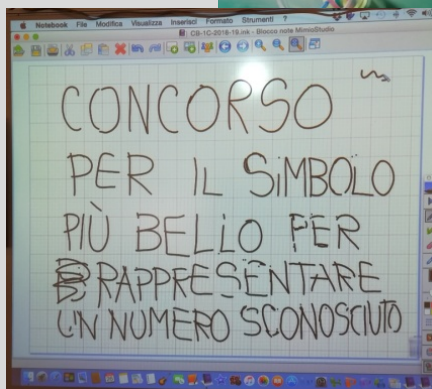
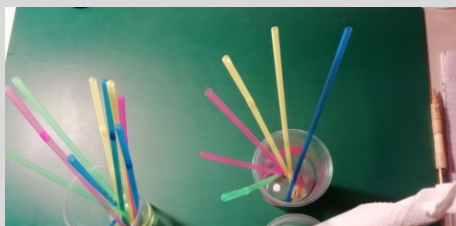
Verso le equazioni per gioco (prima primaria, aprile)



G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

59

Verso le equazioni per gioco (prima primaria, aprile)



G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

60

Equazioni per gioco

Early Algebra (EA)																	
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18				
EA						EA-PA				PA							
										Pensiero Algebrico (PA)							

Evoluzione del **balbettio algebrico**:
 approccio graduale all'algebra
 anche attraverso situazioni problematiche
 rappresentabili con **equazioni per gioco**

Inf	Primaria					Secondaria I			Secondaria II				
1	1	2	3	4	5	1	2	3	1	2	3	4	5

G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT 61

Equazioni per gioco

Progetto RMT-ArAI

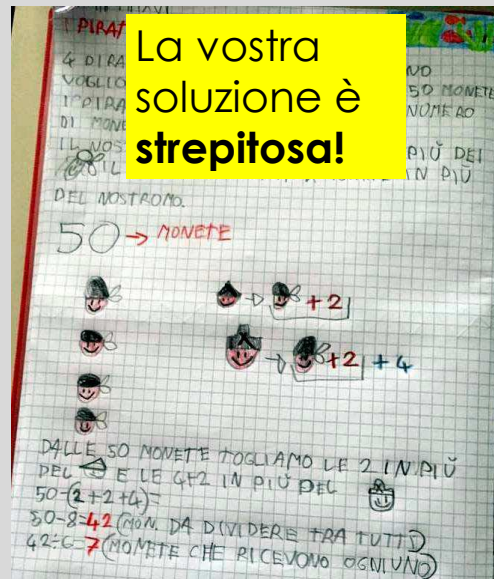
Oro e pirati (Cat 3-4)

Scambi tra due terze:
 Lugo (RA) – Elena Marangoni
 Bribano (BL) - Cosetta Vedana

G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT 62

La soluzione dei Lughini

4 pirati, il nostromo e il capitano vogliono spartirsi un tesoro di 50 monete. I pirati ricevono lo stesso numero di monete. Il nostromo riceve 2 monete in più dei pirati. Il capitano riceve 4 monete in più del nostromo.



G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

63

Traduciamo il problema dei Lughini per Brioshi

Abbiamo deciso di tradurre il testo del problema e lo abbiamo spedito a Brioshi per vedere come se la cavavano. Ecco qui il testo che abbiamo inviato:

4海賊、甲板長と船長は50コインの宝を分割したいです。
 各海賊は、コインの同じ番号を受信します。
 甲板長は、海賊のコインよりも2以上を受け取ります。
 船長は4つ以上の甲板長のコインを受け取ります。

G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

64

La risposta di Brioshi!

Dopo qualche giorno abbiamo ricevuto dei materiali da Brioshi!

Anzi: ci manda **un sacco** di materiali!

La prima cosa che ha mandato è la loro soluzione in linguaggio matematico. All'inizio assomiglia alla vostra, ma poi fanno qualcosa di diverso...

Guardate un po': cosa ne pensate?

G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

65

La soluzione della classe di Brioshi (8 anni)

$$\text{Pirata} = \text{Smile} + 2$$

$$\text{Pirata} = \text{Pirata} + 4 = \text{Smile} + 2 + 4 = \text{Smile} + 6$$

$$\text{Smile} + \text{Smile} + \text{Smile} + \text{Smile} + \text{Pirata} \cdot 2 + \text{Pirata} \cdot 6 = 50$$

$$\text{Smile} + \text{Smile} + \text{Smile} + \text{Smile} + \text{Smile} + \text{Smile} + 2 + 6 = 50$$

$$\text{Smile} \times 6 + 8 = 50$$

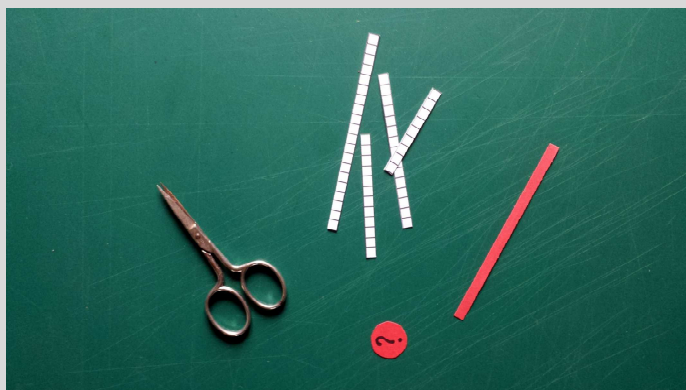
Rappresentazione
di Brioshi

G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

66

La risposta di Brioshi!

Poi ci ha mandato questa fotografia:



Vogliono farci capire come hanno continuato a lavorare.

G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

67

La risposta di Brioshi!

E infine... guardate cosa hanno inviato: la spiegazione di come hanno continuato dopo aver scritto



$$\times 6 + 8 = 50$$


e lo hanno fatto addirittura con delle **animazioni!!!**

Noi le abbiamo guardate più volte (all'inizio in silenzio) e le abbiamo capite bene. Ora stiamo sperimentando anche noi la loro strategia con altri problemi.

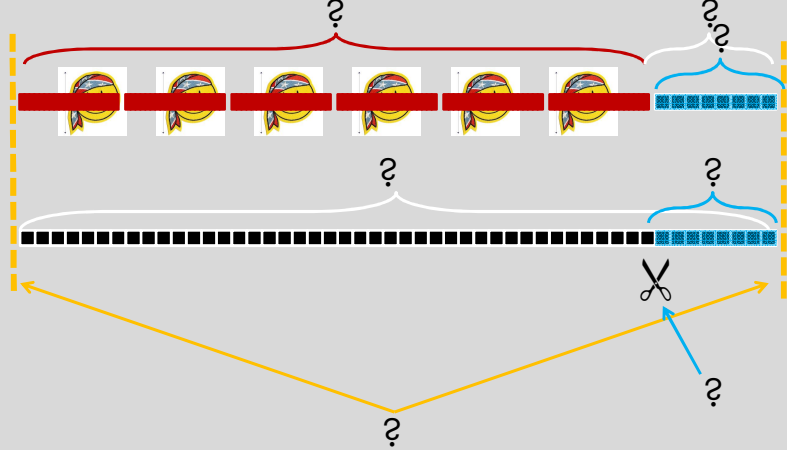
G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT

68

L'animazione inviata da Brioshi


 $\times 6 + 8 = 50$

Scene
dinamiche




G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT 69

Un'ultima sfida per i Lughini

Avete visto che bella animazione?
Ora la **sfida finale per voi**, e questa ve la lanciamo noi!

Iniziando come Brioshi da questa frase:


 $\times 6 + 8 = 50$

siete capaci di rappresentare in linguaggio matematico i passaggi che avete visto dell'animazione?
Noi lo abbiamo fatto!

G. Navarra - Siena -22-24 novembre 2019 – Primo Corso di Formazione ARMT 70

Un'ultima sfida per i Lughini

Rappresentazione delle fasi dell'animazione:

$$\text{👤} \times 6 + 8 = 50$$

$$\text{👤} \times 6 + 8 = 42 + 8$$

$$\text{👤} \times 6 + \cancel{8} - \cancel{8} = 42 + \cancel{8} - \cancel{8}$$

$$\text{👤} \times 6 = 42$$

$$\text{👤} \times 6 : 6 = 42 : 6$$

$$\text{👤} = 7$$

Rappresentazione diversa del 'togliere numeri uguali' proposta in alcune classi, compresa la terza di Bribano.

Al posto della seconda e della terza riga tagliano subito i due 8:

$$\text{👤} \times 6 + \cancel{8} = 42 + \cancel{8}$$

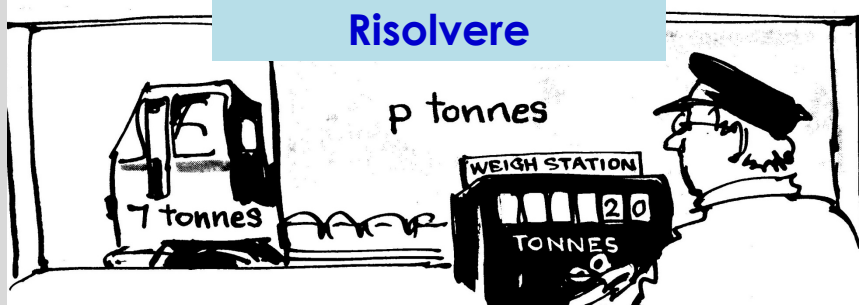
e poi continuano come gli altri.

Le equazioni per gioco si evolvono

Problem A

A lorry and its load are being weighed.

Risolvere



Quanto pesa la merce portata dal camion?

Dati
20 e 7

Da trovare
La tara

$$20 - 7 = 13$$

Le equazioni per gioco si evolvono

Problem A

A lorry and its load are being weighed.

Rappresentare



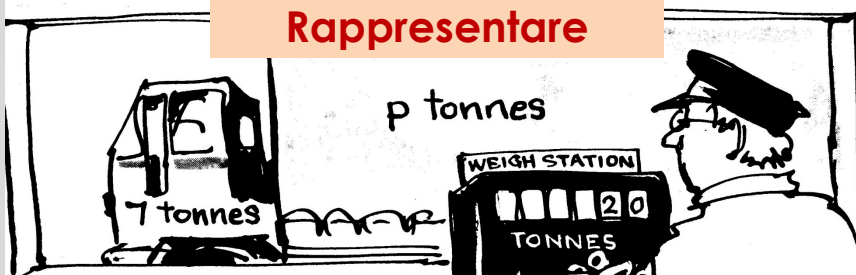
Rappresenta la situazione in modo che altri (i compagni di un'altra classe, Brioshi) possano trovare il peso della merce trasportata dal camion.

Le equazioni per gioco si evolvono

Problem A

A lorry and its load are being weighed.

Rappresentare



$$7+p=20 \quad 20=7+p$$

$$p+7=20 \quad 20=p+7$$

$$20-p=7 \quad 7=20-p$$

$$20-7=p \quad p=20-7$$

Early algebra e problemi

Trasformare problemi verbali standard
in problemi verbali non standard

Si vuol mostrare come alcuni dei
normali problemi dei libri di testo siano
modificabili e possano trasformarsi da
testi e consegne 'procedurali' in testi e
consegne 'relazionali'.

L'autobus (C. Riva, Matematica plus QO, EIMedi, 2005)

42

QUALE OPERAZIONE?

- 1 Leggi il problema e risolvi lo seguendo lo schema proposto.

Sull'autobus ci sono 9 persone. Alla fermata scendono 4 persone e nessuno sale. L'autobus riparte.

Quante persone si trovano ora sull'autobus?

SCRIVI LE INFORMAZIONI UTILI:

..... : persone sull'autobus

..... : persone che scendono
alla fermata

ESEGUI L'OPERAZIONE:

..... =

SCRIVI LA RISPOSTA:

.....



Early algebra e problemi ,Terza primaria

Su un autobus viaggiano 36 passeggeri.
Alla prima fermata parecchi scendono e nessuno sale. L'autobus riparte con 25 passeggeri.



A1 Rappresenta la situazione
linguaggio matematico.

A2 Scrivi il significato del
numero sconosciuto.

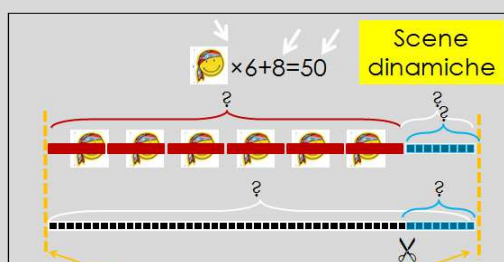
A3 Manda a Brioshi la


Quanti passeggeri scendono? $36-25=11$


Rappresenta la situazione...

$$36-s=25 \quad s+25=36$$

Un'altra metafora nell'avvicinamento alle equazioni




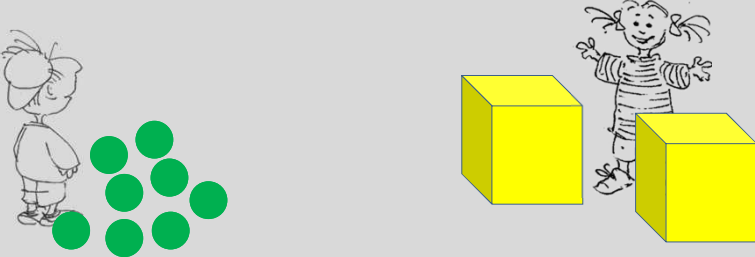
 1



A. Descrivi quello che vedi.
 B. Spiega come determini il numero delle biglie nella scatola utilizzando le regole del gioco.
 C. Descrivi la tua conclusione con una frase che inizi con le parole 'Il numero delle biglie'.
 D. Traduci per Brioshi la frase C.


79

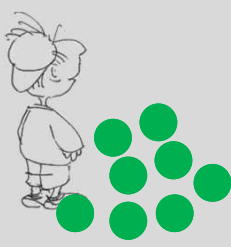
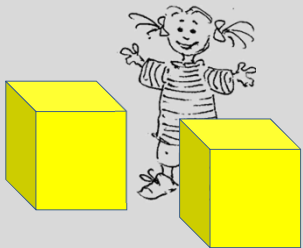
 2



A. Descrivi quello che vedi.
 B. Spiega come determini il numero delle biglie in ogni scatola utilizzando le regole del gioco.
 C. Descrivi la tua conclusione con una frase che inizi con le parole 'Il numero delle biglie'.

80

 **2**

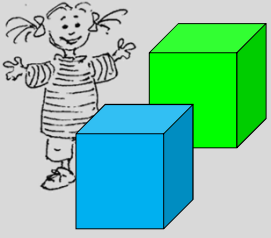
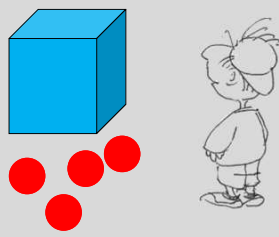
Il num delle b di B è uguale al num delle b nelle sc di M
Il n delle b di B è uguale alla somma dei n delle b nelle sc
 D. Traduci per Brioshi la frase C.
 g = numero delle biglie in ognuna delle scatole uguali

$$8 = g + g$$


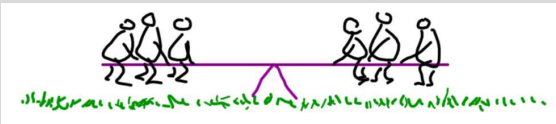

$$8 = 2 \times g$$

Il n delle b è uguale alla al doppio del n delle b in una sc₈₁

Bibo e Marta hanno lo stesso numero di biglie

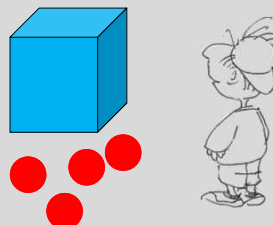
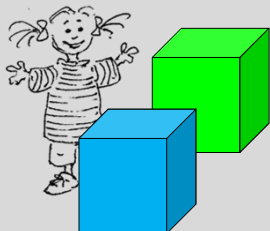



Il 'principio dello zitolo zotolo'

G. Navarra - MATEMATICA in GIOCO 2 - Trieste, Muggia - 27 marzo 2019 82

Bibo e Marta hanno lo stesso numero di biglie



Il 'principio dello
zitolo zotolo'



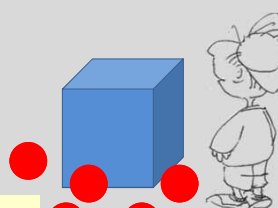
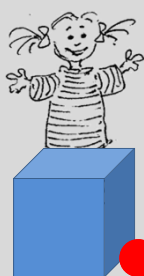
$$\begin{aligned} b+v &= b+4 \\ \cancel{b}+v &= \cancel{b}+4 \\ v &= 4 \end{aligned}$$

G. Navarra - MATEMATICA in GIOCO 2 - Trieste, Muggia - 27 marzo 2019

83

Il 'principio dello zitolo zotolo'

Bibo e Marta hanno lo stesso numero di biglie.



$$\begin{aligned} b+c+3 &= b+5 \\ \cancel{b}+c+3 &= \cancel{b}+5 \\ c+3 &= 5 \\ c+3 &= 3+2 \\ \cancel{c}+3 &= \cancel{c}+2 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

G. Navarra - MATEMATICA in GIOCO 2 - Trieste, Muggia - 27 marzo 2019

84

Conclusioni e questioni aperte

Gli insegnanti* **non praticano una didattica per problemi** a gestire situazioni problematiche.

Il disorientamento deriva dalle situazioni problematiche che si presentano dall'assuefazione a procedure che li conduce a operazioni di routine e a soluzioni standard che non consentono di affrontare un'unica situazione.



La didattica tradizionale deriva da standard che non consentono di affrontare un'unica situazione.

Docenti e corsi di formazione sono ancora nella **gabbia procedurale**.

della

Conclusioni e questioni aperte



Conclusioni e questioni aperte

Si ritiene importante/necessario modificare il forno e abbassare la temperatura?

La realtà dell'insegnante 'procedurale' interferisce con l'efficacia delle 'buone' formazioni? Se sì, quanto? O possiamo affermare che non ci siano queste interferenze?

Ci sono paesi che inseriscono principi dell'early algebra nei loro programmi con l'obiettivo di formare insegnanti 'relazionali'. Si riconosce in questa una strada?



Vi ringrazio per la vostra attenzione

www.progettoaral.it

FB: gruppo Progetto ArAl